Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 13. Mai, SS08

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1: Diskrete Energieerhaltung

Im folgenden werden abermals die nachstehenden Gleichungen betrachtet.

$$\text{Harmonischer Oszillator}: \; \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

$$\text{Mathematisches Pendel}: \; \ddot{\xi} + \omega^2 \sin(\xi) = 0 \tag{2}$$

Schreiben Sie ein Matlab-Programm, um die Anfangswertprobleme für (1) und (2) zu lösen. Verwenden Sie dabei das *implizite Euler-Verfahren* und die *Mittelpunktsregel*. Beobachten Sie das zeitliche Verhalten der jeweiligen Energie und vergleichen Sie dies mit expliziten Verfahren.

Aufgabe 2.2 Numerische Experimente

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \kappa x = q \end{cases}$$

mit $\alpha, \kappa > 0$.

a) Beweisen Sie für beliebiges $T > 0$ die Abschätzung

$$\sup_{t \in [0,T]} x(t) \;\le\; C\big(x_0 + T \sup_{t \in [0,T]} q(t)\big)$$

wobei C eine möglicherweise von α und κ abhängige (aber von T unabhängige) Konstante darstellt.

b) Illustrieren Sie die obige Ungleichung anhand numerischer Simulationen, wobei Sie für q einige konkrete Funktionen einsetzen (Numerisches Verfahren z.B. RK4).

c) Führen Sie b) auch für das AWP zu der Gleichung $\ddot{x}(t) + t x(t) = q(t)$ durch.

Aufgabe 2.3: Zu den Runge-Kutta Verfahren

Betrachten Sie das folgende Runge-Kutta Verfahren:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t, x_n) \\
k_2 &= f(t + \tfrac{1}{3}h, x_n + \tfrac{1}{3}k_1) \\
k_3 &= f(t + \tfrac{2}{3}h, x_n + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2) \\
x_{n+1} &= x_n + h\big(\tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{3}k_2 + \tfrac{1}{2}k_3\big)
\end{aligned}$$

0) Geben Sie das zugehörige *Butcher-Schema* an.

a) Bestimmen Sie (numerisch) die Konvergenzrate.

b) Ermitteln Sie das Stabilitätsgebiet (Skizze bzw. Plot am besten mit Matlab).

Aufgabe 2.4: Mysteriöse Zusammenhänge

Die folgende Aufgab deckt einen verblüffenden Zusammenhang zwischen der Schwingungsgleichung und der Bewegung in einem (Coulombschen) Zentralkraftfeld auf (z.B. die Bewegung der Erde im Schwerefeld der Sonne).

Es sei $w : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, welche der Differentialgleichung $\ddot{w} + w = 0$ genüge. Ferner sei $\tau : [0, \infty) \to [0, \infty)$ gegeben durch $\tau(0) = 0$ und $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \dot{\tau}(t) = |w(t)|^2$.

a) Man zeige: $|w(t)|^2 + |\dot{w}(t)|^2 =: 2E = \text{const.}$

b) Man beweise, daß die Funktion $z : [0, \infty) \to \mathbb{C}$, welche durch $z\big(\tau(t)\big) = w^2(t)$ definiert wird, der Differentialgleichung
$$z'' = -4E \frac{z}{|z|^3}. \tag{3}$$
genügt, wobei z'' die zweite Ableitung bzgl. τ bedeutet.

c) Wie hängen die Anfangsbedingungen für z mit denen von w zusammen?

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem zu (3) numerisch, indem Sie

- Gleichung (3) direkt diskretisieren (mittels Verfahren Ihrer Wahl)
- die Gleichung für w diskretisieren und den in b) erwähnten Zusammenhang ausnutzen.

Allgemeiner Hinweis: Sollten die Aufgaben zu umfangreich sein, bearbeiten Sie soviel wie Sie schaffen (oben anfangen!), der Rest bleibt dann für das nächste Blatt.