Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 05. Juni, SS08

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1: Simulation einer radioaktiven Zerfallsreihe

Beim radioaktiven Zerfall wandelt sich ein radioaktives Material unter Abgabe radioaktiver Strahlung in andere meist wieder radioaktive Substanzen um. Die Zerfallsgeschwindigkeit ist charakterisiert durch die sogenannte Halbwertzeit T, die angibt, wie lange es dauert bis eine gegebene Menge eines radioaktiven Stoffes zur Hälfte zerfallen ist. Äquivalent dazu ist die Beschreibung mit der Zerfallskonstanten λ die durch $\lambda = (\ln 2)/T$ definiert ist. Manche Stoffe können auf unterschiedliche Art und Weise zerfallen, so dass die resultierende Zerfallskette unterschiedliche Zweige haben kann. In der folgenden Tabelle ist eine Teilreihe der Uran-Radium-Zerfallsreihe beschrieben. Die Abkürzungen in der linken Spalte charakterisieren das radioaktive Isotop mit Angabe der Atommasse (hochgestellt). In der zweiten Spalte ist die Halbwertzeit notiert und in der dritten Spalte stehen die resultierenden Isotope, wobei die nachgestellten Prozentzahlen angeben, in welchem Verhältnis die Produkte entstehen (bei fehlender Nennung gilt 100%).

Isotop	T	Produkt
^{218}Po	3.05 min	^{214}Pb (99.98%) ^{218}At (0.02%)
^{218}At	1.5 s	^{214}Bi (99.90%) ^{218}Rn (0.1%)
^{218}Rn	35 ms	^{214}Po
^{214}Pb	26.8 min	^{214}Bi
^{214}Bi	19.9 min	^{214}Po (99.98%) ^{210}Ti (0.02%)
^{214}Po	0.164 μs	^{210}Pb
^{210}Ti	1.3 min	^{210}Pb
^{210}Pb	22.3 a	...

Bezeichnen wir die Stoffmenge des Isotops i mit N_i und die zugehörige Zerfallskonstante mit λ_i, so lautet die entsprechende Stoffbilanzgleichung

$$\dot{N}_i = -\lambda_i N_i + \sum_k \lambda_k p_{ik} N_k$$

wobei der negative Term vom Zerfall herrührt und die positiven Beiträge von den Isotopen k stammen, die beim Zerfall mit dem Prozentsatz p_{ik} in das Isotop i übergehen.
Stellen Sie die Matrix des zugehörigen linearen Differentialgleichungssystems $\dot{N} = AN$ auf und lösen Sie das Problem mit dem expliziten und dem impliziten Euler Verfahren. Als Anfangswert wählen Sie $N_1 = 1$, $N_2 = \cdots = N_8 = 0$. Das simulierte Zeitintervall soll die Länge 5 Stunden haben. Interpretieren Sie die 8 Lösungskurven $t \mapsto N_i(t)$.