Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 22. Apr., SS 2005

Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 2

Aufgabe 5: Differenzenoperatoren global betrachtet

Betrachte die bekannten Finiten-Differenzen Operatoren $D_h^- := \frac{1}{h}(I - S_{-h})$ und $D_h^+ := \frac{1}{h}(S_h - I)$. Hierbei bezeichne S_h die Verschiebung (engl. *shift*) um die Distanz h nach rechts bzw. nach links, falls $h < 0$, und I die Identität. Studiere diese Operatoren auf einem äquidistanten Gitter $\mathcal{G}_h$ der Maschenweite $h = P/n$ (mit $P > 0$ und $n \in \mathbb{N}$) für P-periodische, reellwertige Funktionen im Intervall $[0, P]$. Die Gitterpunkte seien von links nach rechts durchnumeriert.

a) Gib für die folgenden linearen Abbildungen eine Matrixdarstellung an:

$$\text{i)}\ \ f|_{\mathcal{G}_h} \quad \mapsto \quad D_h^- f|_{\mathcal{G}_h}, \qquad\qquad \text{ii)}\ \ f|_{\mathcal{G}_h} \quad \mapsto \quad D_h^+ f|_{\mathcal{G}_h}$$

b) In welchem Zusammenhang treten die Matrizen (einzelne Punkte stehen für Nullen !)

$$L := \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \qquad R := \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}$$

auf? Welche Eigenschaften dieser Matrizen sind sofort augenfällig. Läßt sich das Spektrum dieser Matrizen erraten? Versuche Eigenwerte und Eigenvektoren zu berechnen.

c) Welche Eigenwerte und Eigenvektoren ergeben sich somit für D_h^- und D_h^+? Ist ein Zusammenhang zum Differentiationsoperator in $\mathcal{C}^1_{\text{per}}\big([0, P], \mathbb{R}\big)$ zu erkennen?

Anmerkung: Unter $\mathcal{C}^1_{\text{per}}\big([0, P], \mathbb{R}\big)$ verstehen wir den linearen Raum aller stetig-differenzierbaren, reellwertigen Funktionen über $[0, P]$, deren jeweilige Funktions- bzw. Ableitungswerte in den Randpunkten 0 und P übereinstimmen (d.h. $f(0) = f(P)$ und $f'(0) = f'(P)$).

Aufgabe 6: Diskretisierung des Laplace-Operators mittels 5-Punkte Stern

Der Laplaceoperator $\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2$ kann lokal mit Hilfe des *Fünf-Punkte Sterns* diskretisiert werden:

$$\Delta_h f(x, y) := \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_h f(x, y) := \frac{1}{h^2} \Big\{ S_h^x f - 2f + S_{-h}^x f \Big\}_{(x,y)} + \frac{1}{h^2} \Big\{ S_h^y f - 2f + S_{-h}^y \Big\}_{(x,y)}$$

Hierbei bezeichnen S_h^x bzw. S_h^y die Verschiebungsoperatoren in x- bzw. y-Richtung. Analog zu der vorangehenden Aufgabe ist der so diskretisierte Laplace-Operator auf einem äquidistanten Gitter in einem quadratischen Gebiet der Seitenlänge P zu betrachten. Auf Gitterfunktionen, welche in x- bzw. y-Richtung P-periodisch sind, läßt sich der diskrete Laplace-Operator global anwenden. Welche Matrixdarstellung(en) ergeben sich für die zugehörige lineare Abbildung? Wie hängen diese von der Numerierung der Gitterpunkte ab? Versuche eine besonders schön strukturierte

Matrix-Darstellung allein mit den oben definierten Matrizen L, R sowie der Einheitsmatrix I anzugeben. **Tip:** Benutze das Kronecker- bzw. Tensorprodukt für Matrizen.