Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 29. Apr., SS 2005

Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 3

Beachte: Die Aufgaben 7 und 8 führen die Aufgaben 5 und 6 fort, insbesondere falls das Diagonalisieren und Aufstellen der Diskretisierungsmatrizen Probleme bereitet hat.

Aufgabe 7: Diskrete Fouriertransformation

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $w_n := e^{2\pi i/n}$ die n'te Einheitswurzel. Unter der *Fourier-Matrix* F_n der Ordnung n verstehen wir die $n \times n$-Matrix, deren konjugiert Transponierte F_n^* für die Indizes $i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, ..., n-1\}$ gegeben ist durch $F^*_{n,ij} := \frac{1}{\sqrt{n}} w_n^{ij}$ oder expliziter

$$F_n^* := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_n & w_n^2 & \dots & w_n^{n-1} \\ 1 & w_n^2 & w_n^4 & \dots & w_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & w_n^{n-1} & w_n^{2(n-1)} & \dots & w_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} .$$

a) Zeige:

$$\text{i)} \quad F_n = F_n^T, \qquad F_n^* = (F_n^*)^T = \bar{F}_n \qquad \Rightarrow \qquad \bar{F}_n^* = F_n$$

$$\text{ii)} \quad F_n F_n^* = F_n^* F_n = I_n \qquad \Leftrightarrow \qquad F_n^{-1} = F_n^* = \bar{F}_n^T$$

Insbesondere sind F_n und F_n^* also *symmetrisch* und *unitär*.
Berechne das charakteristische Polynom bzw. die Eigenwerte von F_n^*. **Tip:** Führe ggf. eine Fallunterscheidung durch. Beachte, daß F_n^* eine *Vandermonde*-Matrix darstellt.

b) Die Abbildung $\mathbb{C}^n \ni x \mapsto F_n x \in \mathbb{C}^n$ wird als *(diskrete) Fouriertransformation* bezeichnet. Warum ist dieser Name gerechtfertigt?
Hinweis: Stelle die Analogie zu den Fourierreihen bzw. zum Fourierintegral her. Betrachte dabei auch die besonderen Eigenschaften bezüglich der Ableitung.

Anmerkung: Die diskrete Fouriertransformation kann dazu genutzt werden, spezielle lineare Gleichungssysteme, welche sich durch finite Differenzen ergeben, effizient zu lösen.

Aufgabe 8: Eigenwerte des diskreten Laplace-Operators

Betrachte die Diskretisierung der zweiten Ableitung mittels des Sterns $[1 \;\; -2 \;\; 1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Delta_{1,n}$ die Matrixdarstellung des zugehörigen globalen Finiten-Differenzen-Operators für 1-periodische Funktionen auf dem Gitter $\mathcal{G}_n := \{\frac{i}{n} | \, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$.

a) Verwende die diskrete Fouriertransformation und die Darstellung

$$\Delta_{1,n} = -2I_n + R_n + L_n \; ,$$

um die Eigenwerte von $\Delta_{1,n}$ bequem zu berechnen. Dabei stehen I_n für die $n \times n$-Einheitsmatrix und L_n bzw. R_n für die in Aufgabe 5 (Blatt 2) definierten $n \times n$-Matrizen. Zeige, daß

die Eigenwerte von $\Delta_{1,n}$ für $n \to \infty$ gegen die Eigenwerte des eindimensionalen Laplace-Operators (zweite Ableitung) im Funktionenraum $\mathcal{C}^2_{\text{per}}([0,1],\mathbb{C})$ konvergieren.
Somit existiert für jeden Eigenwert λ des Differentialoperators und jedes $\epsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$, derart daß $\Delta_{1,n}$ für alle $n \geq m$ einen Eigenwert besitzt, welcher in einer ϵ-Umgebung von λ liegt.

Auf dem Gitter $\mathcal{G}_n \times \mathcal{G}_n = \{(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) | \, i,j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ bezeichne $\Delta_{2,n}$ die Matrixdarstellung des diskreten Laplace-Operators (Fünf-Punkte-Stern) für Funktionen, welche in x- und y-Richtung periodisch sind mit der Periodenlänge 1.

b) Begründe, weshalb $\Delta_{2,n}$ die beiden folgenden Darstellungen besitzt, wenn die Gitterpunkte fortlaufend entweder spalten- oder zeilenweise durchnumeriert werden. Beachte die Reihenfolge der Faktoren in der untenstehenden Gleichung!

$$\begin{aligned}\Delta_{2,n} &= n^2 \left\{ 2\, I_n \otimes I_n - \big(\Delta_{1,n} \otimes I_n + I_n \otimes L_n + I_n \otimes R_n\big) \right\} \\ &= n^2 \left\{ 2\, I_n \otimes I_n - \big(I_n \otimes \Delta_{1,n} + L_n \otimes I_n + R_n \otimes I_n\big) \right\}\end{aligned}$$

c) Berechne zu $\Delta_{2,n}$ die Eigenwerte und Eigenvektoren. Zeige analog zu a), daß die Eigenwerte von $\Delta_{2,n}$ für $n \to \infty$ gegen die Eigenwerte des Laplace-Operators im Funktionenraum $\mathcal{C}^2_{\text{per}}([0,1]^2,\mathbb{C})$ konvergieren,

d) Bekanntlich kann man die Eigenvektoren des Laplace-Operators $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ in $\mathcal{C}^2_{\text{per}}([0,1]^2,\mathbb{C})$ als Tensorprodukt der Eigenvektoren von $\frac{d^2}{dx^2}$ in $\mathcal{C}^2_{\text{per}}([0,1],\mathbb{C})$ auffassen. Welche Beziehung besteht zwischen den Eigenvektoren von $\Delta_{1,n}$ und $\Delta_{2,n}$?

e) Die Darstellung von $\Delta_{1,n}$ in a) und $\Delta_{2,n}$ in b) bezieht sich auf eine kanonische Numerierung der Gitterpunkte. Die Numerierung der Gitterpunkte wird künstlich eingeführt, um die Daten im Computer referenzieren und abspeichern zu können. Obgleich eine sinnvolle Numerierung die Struktur der Matrix und damit auch die numerische Handhabbarkeit deutlich beeinflussen kann, sollten wesentliche Eigenschaften von der Gitternumerierung unbeeinflußt bleiben. Begründe, warum die Eigenwerte von der Numerierung unabhängig sind? Wie transformieren sich die Eigenvektoren?

f) (Sonderaufgabe) Versuche ähnliche Untersuchungen für den Neun-Punkte-Sterns $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ zur Diskretisierung des Laplace-Operators durchzuführen.

Bemerkung: Es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $p \times q$-Matrix. Dann ist das *Kroneckerprodukt* eine $(mp) \times (nq)$-Matrix, welche folgendermaßen definiert ist:

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Implementierung des θ-Verfahrens

Versuche das θ-Verfahren für die eindimensionale Diffusionsgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen in MATLAB zu implementieren.