Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 6. Mai, SS 2005

Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 4

Aufgabe 10: Ein elementares Schema zur Lösung der Diffusionsgleichung

Im folgenden soll ein einfaches numerisches Verfahren zur Lösung der Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung) analysiert werden. Wir betrachten hier zunächst das Ganzraumproblem für die Unbekannte $v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$:

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_t v(t,x) - \nu \partial_x^2 v(t,x) = 0 & \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \text{mit der Anfangsbedingung } \ v(0,x) = v_0(x) & \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R}\,. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Dabei ist $v_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ eine gegebene Funktion; der Parameter ν wird als *Diffusionskoeffizient* oder *Diffusivität* bezeichnet.
Das Zeit-Raum Gebiet $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ wird mit einem im Ursprung zentrierten Gitter überdeckt. Die Schrittweite in zeitlicher bzw. räumlicher Richtung betrage $\Delta t > 0$ bzw. $\Delta x > 0$. Dabei wird der Gitterknoten mit den Indizes $(n,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ mit dem Zeit-Raum Punkt $(n\Delta t, j\Delta x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ assoziiert. Zur Diskretisierung von (1) führen wir die üblichen Finite-Differenzen Operatoren ein:

$D_t^+ : \mathcal{F}(\mathbb{N}_0) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}_0)$	definiert durch	$D_t^+ f(n) := \frac{f(n+1)-f(n)}{\Delta t}$	für $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0)$
$D_x^- : \mathcal{F}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z})$	"	$D_x^- g(j) := \frac{g(j)-g(j-1)}{\Delta x}$	für $g \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$
$D_x^+ : \mathcal{F}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z})$	"	$D_x^+ g(j) := \frac{g(j+1)-g(j)}{\Delta x}$	für $g \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$

Eine Möglichkeit (1) zu diskretisieren und näherungsweise zu lösen, stellt das folgende (diskrete) Anfangswertproblem für die unbekannte Gitterfunktion $V \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z})$ dar.

$$\left.\begin{array}{ll} V(0,j) = u_0(jh) & \text{für alle } j \in \mathbb{Z} \\ D_t^+ V(n,j) - \nu D_x^+ D_x^- V(n,j) = 0 & \text{für alle } (n,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} \end{array}\right\} \tag{2}$$

Notation: Mit $\mathcal{F}(M)$ bezeichnen wir die Menge der reellwertigen Funktion über M.

a) Setze $\alpha := \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. Zeige, daß sich (2) eindeutig lösen läßt. Definiere dazu einen geeigneten *Evolutionsoperator* $E_\alpha : \mathcal{F}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z})$, so daß für die Lösung V von (2) gilt:

$$V(n+1,\cdot) = E_\alpha V(n,\cdot) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

Antwort: $\big[E_\alpha V(n,\cdot)\big](j) \;:=\; \alpha V(n,j+1) \;+\; (1-2\alpha)V(n,j) \;+\; \alpha V(n,j-1)$

b) Zeige, daß E_α in $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ einen beschränkten linearen Operator darstellt, dessen Norm gegeben ist durch:

$$\|E_\alpha\|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{L}^\infty(\mathbb{Z})\right)} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \alpha \le \frac{1}{2} \\ 4\alpha - 1 & \text{falls} \quad \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bezeichnung: In diesem Kontext nennen wir ein numerisches Schema, welches sich in die Form (3) bringen läßt, *absolut stabil* (in $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{Z})$) für den Wert α, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\|E_\alpha^n\|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{L}^\infty(\mathbb{Z})\right)} \le C$.

c) Für welche $\alpha > 0$ ist das Verfahren stabil? Zeige anhand einer speziellen Initialisierung, daß das Schema für $\alpha > \frac{1}{2}$ nicht absolut stabil sein kann.
Tip: Betrachte die Funktion $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $g(j) = (-1)^j$. Welche spezielle Eigenschaft besitzt g bezüglich E_α?

d) Im folgenden betrachten wir α als fest vorgegeben und setzen $\Delta x \equiv h > 0$ und $\Delta t = \frac{\alpha}{\nu} h^2$. Die Funktion v besitze stetige und beschränkte partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in der Zeit bzw. bis zur vierten Ordnung im Ort, d.h. $v \in \mathcal{C}_b^{2,4}(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$. Ferner sei v eine Lösung der Diffusionsgleichung (1).
Die Gitterfunktion $\hat{v} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z})$ sei definiert durch $\hat{v}(n,j) := v(n\Delta t, j\Delta x)$. Bestimme Konstanten $C_1, C_2 > 0$ unabhängig von h derart, daß die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} \left\| D_t^+ \hat{v} - \nu D_x^+ D_x^- \hat{v} \right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})} &\leq C_1 h^2 \\ \left\| \hat{v}(n+1,\cdot) - E_\alpha \hat{v}(n,\cdot) \right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{Z})} &\leq C_2 h^4 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Beachte, daß die Konstanten von v (bzw. speziellen Ableitungen), ν und α abhängen dürfen!

Anmerkung: Die Differenzen innerhalb der Norm-Doppelbalken bezeichnet man als *Konsistenzfehler, (lokalen) Abschneidefehler (engl. truncation error)* oder *Residuum*. Die maximalen Exponenten von h, welche auf der rechten Seite stehen dürfen, geben die *Konsistenzordnung* bzw. die *Ordnung des Residuums* an. Beachte, daß die Konsistenzordnung eines Schemas nicht eindeutig bestimmt ist, sondern wesentlich davon abhängt, in welcher Weise das Schema aufgeschrieben ist. Im vorliegenden Beispiel ergibt sich (3) im wesentlichen aus (2) durch eine Multiplikation mit Δt.

e) Folgere unter der Voraussetzung in d), daß für $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ eine Konstante $K > 0$ existiert, so daß für jedes $T > 0$ gilt:

$$\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \left\| V(n,\cdot) - \hat{v}(n,\cdot) \right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{Z})} < KTh^2.$$

Das durch (2) bzw. durch (3) und den Operator E_α definierte Verfahren ist daher in jedem beschränkten Zeitintervall von *zweiter Ordnung bezüglich der räumlichen Gitterweite konvergent*.

f) Wie ist das Schema (2) durch einen zusätzlichen Finite-Differenzen Term abzuändern, damit die Ordnung des Konsistenzfehlers von zwei auf vier erhöht wird?

Aufgabe 11: Ein modifiziertes Schema

Betrachte nun alternativ zu (2) die Diskretisierung

$$\left.\begin{aligned} &W(0,j) = v_0(jh) \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{Z} \\ &D_t^+ W - \nu D_x^+ D_x^- W + \tfrac{1}{12}\nu(\Delta x^2 - 6\nu\Delta t)(D_x^+ D_x^-)^2 W = 0 \quad \text{auf } \mathbb{N}\times\mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

a) Stelle das alternative Verfahren (4) ebenfalls in der Form (3) dar mit einem Evolutionsoperator $\tilde{E}_\alpha$. Zeige, daß $\tilde{E}_\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^\infty(\mathbb{Z})) = \{$Menge der beschränkten, linearen Selbstabbildungen in $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{Z})\}$. Zeige ferner, daß das Verfahren für $\frac{1}{6} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$ stabil ist.

b) Beweise, daß das Verfahren mindestens von vierter Ordnung (bzgl. des räumlichen Diskretisierungsparameters) konvergent ist, falls $\alpha \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{3}]$ und das Anfangswertproblem (1) eine Lösung $v \in \mathcal{C}_b^{3,6}(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$ besitzt, insbesondere existieren alle gemischten partiellen Ableitungen bis einschließlich zur dritten Ordnung und sind stetig. Wie oben besteht die folgende Abschätzung mit einer geeigneten Konstanten K, welche nicht von h abhängt.

$$\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \left\| W(n,\cdot) - \hat{v}(n,\cdot) \right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{Z})} < KTh^4.$$

Aufgabe 12: Programmieraufgabe: Verfahrenstest

Es sei $v_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ periodisch. Falls zu v_0 als Anfangsbedingung eine Lösung der Diffusionsgleichung existiert, warum ist diese dann ebenfalls periodisch mit derselben Periodenlänge?
Implementiere beide Verfahren für periodische Anfangsbedingungen. Es werden nur endlich viele Gitterknoten benötigt, falls die Periodenlänge ein Vielfaches der räumlichen Schrittweite ist (warum?). Führe numerische Konvergenztests durch; trage den Fehler in einem doppelt-logarithmischen Diagramm gegen die Schrittweite h im Ort auf. Variiere ν und α. Wie verhalten sich die Verfahren, wenn α außerhalb des jeweiligen Stabilitätsbereiches gewählt wird? Betrachte neben der Skalierung $\Delta t \propto h^2$, die sich aus der Stabilitätsanalyse ergab, auch die Skalierung $\Delta t \propto h$.
Beispiel für eine analytische Lösung: $v(t,x) = e^{-4\pi^2 m^2 \nu t} \sin(2\pi m x), \quad m \in \mathbb{N}$.