Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 20. Mai, SS 2005

Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 6

Aufgabe 16: Approximation von Dirichlet Randbedingungen

Betrachte auf dem Intervall $[0, L]$ die folgende Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dx^2}u(x) &= f(x) \qquad x \in (0, L), \\ u(0) = u(L) &= 0 \end{aligned}$$

mit einer gegebenen Funktion f. Im Falle der 3-Punkte Diskretisierung der zweiten Ableitung ergeben sich die homogenen Dirichlet Randbedingungen auf sehr natürliche Weise. Wie ist bei der 5-Punkte Diskretisierung (siehe Aufgabe 13) zu verfahren? Leite verschiedene Randbedingungen her und vergleiche anhand von Beispielen, wie die Konvergenzordnung durch die Umsetzung der Randbedingung beeinflußt wird. Hängt die Konvergenzordnung auch von f ab?

Aufgabe 17: Diagonal-dominante Matrizen

Es sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Für $i \in \{1, ..., n\}$ definiere man

$$\ell_i(A) \quad := \quad |a_{ii}| - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \qquad \ell(A) := \min_{i=1}^{n} \ \ell_i(A)$$

Die Matrix heißt *streng zeilen-diagonal-dominant*, falls $\ell(A) > 0$.

a) Zeige, daß jede streng zeilen-diagonal-dominante Matrix A invertierbar ist, wobei die Operatornorm der inversen Matrix durch folgende Ungleichung abgeschätzt werden kann.

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\ell(A)}$$

b) Es sei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Diagonalmatrix mit $D_{ij} := \ell_i^{-1}(A)\delta_{ij}$. Zeige, daß die Eigenwerte der Matrix DA betragsmäßig größer gleich 1 sind. Folgere daraus

$$|\det(A)| \ \geq \ \prod_{i=1}^{n} \ell_i(A) \ .$$

c) Gib eine untere Schranke für die Realteile der Eigenwerte von A an, falls die Diagonalelemente nicht negativ sind.

d) Es sei A hermitesch und zeilen-diagonal-dominant. Zeige. daß A genau dann positiv definit ist, falls alle Diagonalelemente von A positiv sind.