Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 03. Juni, SS 2005

Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 7

Aufgabe 18: Praktische Aspekte der polynomialen Interpolation

Bei der numerischen Lösung von (partiellen) Differentialgleichungen werden Interpolationsverfahren als Hilfsmittel verwendet. Aufgrund der Diskretisierung ist die numerische Lösung nur an endlich vielen Stellen gegeben. Die numerische Lösung wird daher meist interpolativ auf den Definitionsbereich der exakten Lösung fortgesetzt und kann somit auch an beliebigen Zwischenstellen ausgewertet werden. Oftmals fließen Interpolations- bzw. Extrapolationsmethoden aber auch direkt in den Lösungsalgorithmus ein. Denkt man beispielsweise an Finite Differenzen, so ist dies insbesondere bei *irregulären* Knoten der Fall. Dabei handelt es sich um Rand-, Interface- oder Kopplungsknoten, die im Gegensatz zu den inneren Knoten nicht über die vollständige (reguläre) Anzahl von Nachbarknoten verfügen. Die fehlenden Nachbarn werden mit Hilfe von Inter- bzw. Extrapolationen "ersetzt". Beachte, daß wir im folgenden nicht zwischen Extrapolation und Interpolation unterscheiden, sondern die Extrapolation als einen Sonderfall der Interpolation betrachten! Im Kontext der Finiten Differenzen ist die Interpolation auf äquidistanten Gittern von Interesse siehe b) und Aufgabe 19. (Dies ist allerdings bei weitem nicht ausschließlich zutreffend; man denke nur an zum Gitter versetzte Randbedingungen).

0) Wie berechnet sich das Interpolationspolynom zu einer gegebenen Menge von endlich vielen Stützstellen $\xi_0, ..., \xi_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$?
Gib dazu an, wie sich die Koeffizienten des Interpolationspolynoms $P(f|\xi_0, ..., \xi_n)$ aus den Funktionswerten der zu interpolierenden Funktion f in den Stützstellen berechnen (Aufstellen eines Gleichungssystem).

a) Es sei $x \in \mathbb{R}$ ein beliebiger aber fest gewählter Punkt. Die Interpolationsgewichte $w_0, ..., w_n$ bezüglich x seien durch folgende Gleichung definiert.

$$\sum_{i=0}^{n} w_i f(\xi_i) \; = \; P(f|\xi_0, ..., \xi_n)(x)$$

Warum müssen die Interpolationsgewichte aufsummiert immmer 1 ergeben?
Zeige, daß die Interpolationsgewichte nur von der relativen Lage des Interpolationspunktes zu den Stützstellen abhängen, das heißt, daß sie invariant unter affin-linearen Selbstabbildungen der reellen Achse sind.

Genauer: Es seien $\xi_0, ..., \xi_n$ und $\zeta_0, ..., \zeta_n$ zwei Mengen von Interpolationsknoten und x, z zwei Interpolationsstellen. Existiert $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$ derart, daß

$$z = ax + b, \qquad \zeta_i = a\xi_i + b \quad \text{für } i \in \{0, 1, ..., n\},$$

so ergibt sich in beiden Fällen der gleiche Satz von Interpolationsgewichten. Hängen $x, \xi_0, ..., \xi_n$ und $z, \zeta_0, ..., \zeta_i$ mit $x \neq \xi_0$ bzw. $z \neq \zeta_0$ über eine affin-lineare Transformation miteinander zusammen, falls einander entsprechende Abstandsverhältnisse übereinstimmen?

$$\tfrac{|x-\xi_i|}{|x-\xi_0|} = \tfrac{|z-\zeta_i|}{|z-\zeta_0|} \qquad i \in \{1, ..., n\}$$

b) Es seien $x_0 < ... < x_n$ *äquidistant* mit

$$|x_{i-1} - x_i| = h \qquad \text{für } \; i \in \{1, ..., n\}$$

für ein gegebenes $h > 0$. Angenommen eine Funktion f ist auf allen Punkten mit Ausnahme von x_k für ein $k \in \{0, 1..., n\}$ bekannt. Bestimme in diesem Fall die Interpolationsgewichte $w_{k,i}$ derart, daß

$$P(f|x_0, ..., \widehat{x_k}, ..., x_n)(x_k) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} w_{k,i} f(x_i)$$

gilt. Dabei deutet $\widehat{\ }$ an, daß x_k aus der Liste der Interpolationsknoten zu streichen ist (bildlich: "seinen Hut nehmen muß"). Zeige, daß die Interpolationsgewichte durch

$$w_{k,i} = (-1)^{i+k+1} \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n}{k}}$$

gegeben sind.

Aufgabe 19: Dirichlet-Randbedingungen und Fehlerverschmierung

Die folgende Aufgabe präzisiert Aufgabe 16 und führt diese fort. Auf dem Intervall $[0, L]$ betrachten wir ein uniformes Gitter. Die Gitterpunkte seien von 0 bis $N \in \mathbb{N}$ von links nach rechts durchnumeriert, so daß x_0 dem linken und x_N dem rechten Randpunkt entspricht. Bei der Implementierung der Dirichlet Randbedingungen für den 5-Punkte Stern ergibt sich am linken Rand (analog auch am rechten Rand) die Schwierigkeit, daß der Stern in der Gleichung für u_1 auf den fiktiven Wert u_{-1} zugreift. Es bieten sich die beiden folgenden Auswegsmöglichkeiten an:

i) Ersetze in x_1 bzw. x_{N-1} den 5-Punkte Stern durch einen 3-Punkte Stern.

ii) Extrapoliere u_{-1} (u_{N+1}) formal mittels der Werte in den benachbarten, rechten (linken) Knoten und ersetze u_{-1} (u_{N+1}) in der Gleichung für u_1 (u_{N-1}), so daß sich ein *geschlossenes* Gleichungssystem in $u_0, ..., u_N$ ergibt.

Verwende für die Extrapolation konstante, lineare, quadratische, kubische sowie quartische Polynome.

a) Zeige, daß die Alternativen i) und ii) bei kubischer Interpolation auf das gleiche Verfahren hinauslaufen.

b) Bestimme für jede Möglichkeit die Konsistenzordnung des Verfahrens in den Punkten x_1 bzw. x_{N-1}.

c) Führe numerische Experimente durch. Gibt es eine unerwartete Beobachtung?

d) Versuche die Beobachtungen mittels der asymptotischen Analysetechnik aus der Vorlesung formal zu begründen.

e) Die formale Begründung läßt sich rigoros machen, falls sich die Stabilität der Verfahren beweisen läßt. Zeige dazu, daß die Supremumsnorm der *inversen* Finite Differenzen Verfahrensmatrizen *unabhängig* von der Gitterweite, d.h. von der Anzahl der Gitterpunkte, abgeschätzt werden kann.