M. Rheinländer

Universität Kaiserslautern
Mathematik für Physiker I, WS 2000/01
Weihnachtsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 3.iii)

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit $\dim V =: N$ und $T : V \to V$ sei ein nilpotenter Endomorphismus. Dann existiert eine Basis $b_1, \ldots b_N$ derart, daß gilt:

$$T(b_1) = 0 \qquad \text{und} \qquad T(b_i) = b_{i-1} \ \text{ oder } \ T(b_i) = 0 \quad \text{für } 1 < i \leq N$$

Zum Beweis führen wir zunächst folgenden Hilfssatz an:

Es sei $T : V \to V$ nilpotent. $U \subset V$ sei ein T-invarianter, echter Unterraum insb. $T(U) \subset U$. Ist $v \notin U$, $v \in \operatorname{im} T^m$ und $T(v) = 0$, so sind $T^{-m}(v), \ldots, T^{-1}(v), v, U$ linear unabhängig, wobei hier jeweils Repräsentanten der Urbilder gemeint sind, welche durch T aufeinander abgebildet werden.

Beweis des Hilfssatzes: Es sei $u \in U$ ungleich Null. Betrachte

$$0 = \mu u + \lambda_0 v + \lambda_1 T^{-1}(v) + \ldots + \lambda_m T^{-m}(v)$$

Anwenden von T^m liefert $0 = \mu\tilde{u} + \lambda_m v$ mit $\tilde{u} = T^m(u) \in U$. Da nach Voraussetzung v, U linear unabhängig sind, folgt $\mu = \lambda_m = 0$. Man zeigt durch sukzessives Anwenden von $T^{m-1}, T^{m-2}, \ldots$ auf die obige Gleichung, daß auch die anderen Koeffizienten verschwinden müssen.

Die gesuchte Basis kann nun nach folgendem Algorithmus konstruiert werden.

1. Schritt: Wähle $v \neq 0$. Da T nilpotent ist, existieren natürliche Zahlen k, l mit

$$\begin{array}{ccc} v \in \operatorname{im} T^k & \text{aber} & v \notin \operatorname{im} T^{k+1} \\ T^l(v) \neq 0 & \text{aber} & T^{l+1}(v) = 0. \end{array}$$

Setze nun: $b_1 = T^l(v), b_2 = T^{l-1}(v), \ldots, b_{l+1} = v, \ldots b_{l+k+1} = T^{-k}(v)$.
Die so erhaltenen Vektoren sind linear unabhängig und spannen einen T-invarianten Unterraum auf. Falls $l + k + 1 = N$ ist man bereits fertig.

Im folgenden bezeichne M die Anzahl der bereits gefundenen Basisvektoren mit $U := \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_M\}$.

2. Schritt: Wähle $w \notin U$. Es existiert ein $\mu \in \mathbb{N}_0$ mit

$$T^\mu(w) \notin T(U) \qquad \text{aber} \qquad T^{\mu+1}(w) \in T(U).$$

Dann kann $u \in U$ so gewählt werden, daß für $b_{M+1} := T^\mu(w) - u$ gilt: $T(b_{M+1}) = 0$; beachte $b_{M+1} \notin U$. Desweiteren existiert $\nu \in \mathbb{N}_0$ mit

$$b_{M+1} \in \operatorname{im} T^\nu \qquad \text{aber} \qquad b_{M+1} \notin \operatorname{im} T^{\nu+1}.$$

Setze: $b_{M+2} = T^{-1}(b_{M+1}), \ldots, b_{M+\nu+1} = T^{-\nu}(b_{M+1})$.
Aufgrund des Hilfssatzes folgt, daß die Vektoren $b_1, \ldots, b_{M+\nu+1}$ linear unabhängig sind.
Falls $M + \nu + 1 \neq N$ setze $M = M + \nu + 1$ und wiederhole den zweiten Schritt, solange bis die Anzahl der Basisvektoren gleich N ist.

Konstruktionsgemäß besitzt die erhaltene Basis die verlangten Eigenschaften. Die zugehörige Matrix ist dann nur auf der ersten oberen Nebendiagonalen besetzt, wobei als Einträge ausschließlich Nullen und Einsen vorkommen.