M. Rheinländer

Universität Kaiserslautern
Mathematik für Physiker I, WS 2000/01
Weihnachtsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 7)

Es sei $m \leq n$, ferner seien A, B zwei $m \times n$ Matrizen. Dann ist $A \cdot B^t$ eine $m \times m$ Matrix und es gilt:

$$\det(A \cdot B^t) = \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_m \leq n} \det(A^{k_1,\ldots,k_m}) \cdot \det(B^{k_1,\ldots,k_m}).$$

Dabei ist $A^{k_1,\ldots,k_m} := (a^{k_1}, \ldots, a^{k_m})$ die $m \times m$ Matrix, welche sich aus den m Spaltenvektoren $a^{k_1}, \ldots, a^{k_m}$ ergibt.

Beweis:

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_m \leq n} \det(A^{k_1 \ldots, k_m}) \cdot \det(B^{k_1,\ldots,k_m}) \\
= & \frac{1}{m!} \sum_{1 \leq k_1,\ldots,k_m \leq n} \det(A^{k_1 \ldots k_m}) \cdot \det(B^{k_1,\ldots k_m}) \\
= & \frac{1}{m!} \sum_{1 \leq k_1,\ldots,k_m \leq n} \sum_{\rho \in S_m} \operatorname{sgn}(\rho)\, a^{k_1,\ldots,k_m}_{1,\rho(1)} \cdot \ldots \cdot a^{k_1,\ldots,k_m}_{m,\rho(m)} \cdot \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b^{k_1,\ldots,k_m}_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b^{k_1,\ldots,k_m}_{m,\sigma(m)} \\
= & \frac{1}{m!} \sum_{1 \leq k_1,\ldots,k_m \leq n} \sum_{\rho \in S_m} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1,k_{\rho(1)}} \cdot \ldots \cdot a_{m,k_{\rho(m)}} \cdot \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b_{m,\sigma(m)} \\
= & \frac{1}{m!} \sum_{1 \leq k_1,\ldots,k_m \leq n} \sum_{\rho \in S_m} \operatorname{sgn}(\rho)\, a_{\rho(1),k_1} \cdot \ldots \cdot a_{\rho(m),k_m} \cdot \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{\sigma(1),k_1} \cdot \ldots \cdot b_{\sigma(m),k_m} \\
= & \frac{1}{m!} \sum_{\rho \in S_m} \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{1 \leq k_1 \leq n} a_{\rho(1),k_1} b_{\sigma(1),k_1} \cdot \ldots \cdot \sum_{1 \leq k_m \leq n} a_{\rho(m),k_m} b_{\sigma(m),k_m} \\
= & \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{1 \leq k_1 \leq n} a_{1,k_1} b_{\sigma(1),k_1} \cdot \ldots \cdot \sum_{1 \leq k_m \leq n} a_{1,k_m} b_{\sigma(1),k_m} \\
= & \det(A \cdot B^t)
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich per Definition der Determinante. Für den vorletzten Umformungsschritt haben wir von der folgenden Identität Gebrauch gemacht.
Es sei C eine $r \times r$ Matrix. Dann gilt:

$$\det C = \frac{1}{r!} \sum_{\rho \in S_r} \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{sgn}(\sigma)\, c_{\rho(1)\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot c_{\rho(r)\sigma(r)}$$