M. Rheinländer

Universität Kaiserslautern
Mathematik für Physiker I, WS 2000/01

Weihnachtsaufgaben zur Linearen Algebra

Abgabe: im neuen Jahrtausend (11.01.01)

1) Es sei A eine schiefsymmetrische $n \times n$ Matrix, d.h. $A = -A^t$. Ist n ungerade, so ist A singulär.

2) Es sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Für einen Vektor $v \in V$ gelte $F^n(v) \neq 0$ und $F^{n+1}(v) = 0$. Dann sind die Vektoren $v, F(v), ..., F^n(v)$ linear unabhängig.

3) Es sei $T : V \to V$ ein Endomorphismus.

   i) Ist T involutiv, also $T^2 = I$ (I = Identität), dann existiert eine Basis derart, daß T durch eine Diagonalmatrix mit der Diagonalen (1,...,1,-1,...,-1) dargestellt werden kann. 1'sen und -1'sen müssen dabei nicht in gleicher Anzahl vorkommen.

   ii) Welche "kanonische" Matrixdarstellung erhält man, falls T eine Projektion ist ($T^2 = T$)? Unter welchen Umständen ist T sowohl Involution wie Projektion?

   iii) Ist T nilpotent, d.h. es gibt eine natürliche Zahl m mit $T^m = 0$, so gibt es eine Basis von V bzgl. der T durch eine Matrix A repräsentiert wird, deren Einträge sämtlich 0 sind bis auf $a_{i,i+1} = 1$ für $1 \leq i \leq \mathrm{rang} T$.

4) Berechnen Sie die Projektionsmatrix (bzgl. der Standardbasis) auf den Unterraum $\mathrm{span}((1,0,1),(0,1,1))$ entlang des Unterraumes $\mathrm{span}((0,0,1))$ sowie die orthogonale Projektion auf denselben zweidimensionalen Unterraum. Eine Projektion heißt übrigens orthogonal, falls für alle $u, v \in \mathrm{R}^3$ $(Pu, v) = (u, Pv)$ gilt, wobei $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt zur euklidischen Norm bezeichnet.

5) Es sei $T : V \to V$ nilpotent mit $T^m = 0$. Dann ist die Abbildung $I - T$ invertierbar. Geben Sie eine explizite Formel für $(I - T)^{-1}$ in Form einer Potenzreihe an.

6) Zu berechnen ist die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

   Tip: Betrachte die Matrix $A \cdot A^t$.

7) Es sei $m \leq n$, ferner seien A, B zwei $m \times n$ Matrizen. Dann ist $A \cdot B^t$ eine $m \times m$ Matrix und es gilt:

$$\det(A \cdot B^t) = \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_m \leq n} \det(A^{k_1 \ldots k_m}) \cdot \det(B^{k_1, \ldots k_m}).$$

   Dabei ist $A^{k_1,\ldots,k_m} := (a^{k_1}, \ldots, a^{k_m})$ die $m \times m$ Matrix, welche sich aus den m Spaltenvektoren $a^{k_1}, \ldots a^{k_m}$ ergibt. (Hinweis: Die Formel läßt sich direkt nachrechnen, es empfiehlt sich dabei den total antisymmetrischen Tensor $\epsilon_{i_1,\ldots,i_m}$ zu benutzen.)

Frohe Weihnachten und ein gesegnetes Jahr 2001 !