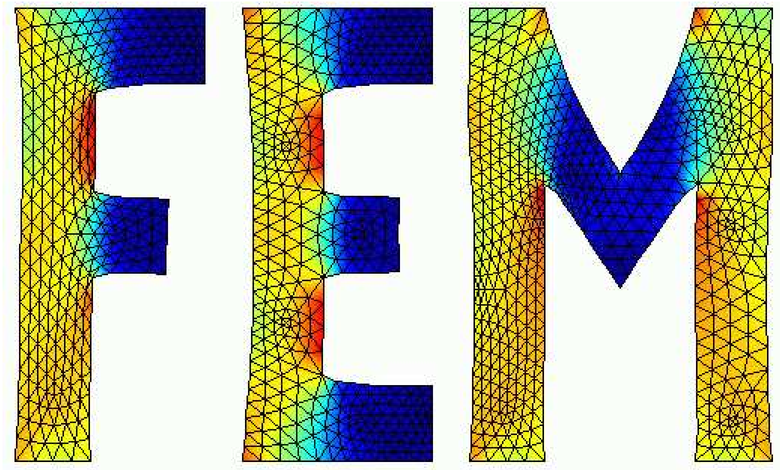


Einführung

Vita Rutka

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik & Statistik
AG Numerik

SS 2009

Was ist FEM?

“Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Lösung, insbesondere elliptischer partieller Differentialgleichungen mit Randbedingungen. Sie ist auch ein weit verbreitetes modernes Berechnungsverfahren im Ingenieurwesen.”

[Wikipedia]

So kam es dazu…

- Anfänge: Courant ('42), Argyris ('54), Turner et al ('56), Clough ('60, Begriff “FE”), Zienkewitz ('65, das 1. Buch)
- Diverse Ingenieuranwendungen in den späten 60'ern, frühen 70'ern
- 1970+: Anfänge kommerzieller FEM-Software (Ansys, Abaqus, etc)

Heute: unzählige (freie & kommerzielle) Software, Anzahl der Forscher (Ingenieure, Mathematiker, Informatiker) $\nearrow \infty$, das populärste Werkzeug

Wo kommen elliptische (u.ä.) Gleichungen vor?

Einige Beispiele:

- Temperaturverteilung:
$$\Delta u = 0$$

- Lamé-Navier Gleichungen in Elastizität mit $\mathbf{u} = (u, v)$:
$$-\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = f$$

  (u, v): Komponenten der Verschiebung, f: innere Kraft, λ, μ: Lamé Koeffizienten

- Navier-Stokes Gleichungen der Strömungsmechanik
$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \frac{1}{\rho} \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

  $u = (u, v)$: Geschwindigkeit, p: Druck, ν: Viskosität, ρ: Dichte

Unsere “Grundgleichung”

Poisson (Laplace) Problem

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

mit Randbedingungen

$$u = u_D \quad \text{auf } \partial\Omega_D \quad , \quad \partial_n u = g \quad \text{auf } \partial\Omega_N$$

(Dirichlet bzw. Neumann Randbedingungen)

Wichtig: $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$

jeder Anfang ist eindimensional

Grundidee in 1D

. . . aus der Sicht eines Mathematikers. . .

Zu lösen: $u'' = f \text{ in } \Omega = (0,1) \quad , \quad u(0) = u(1) = 0$

"Trick": $u'' \cdot v = f \cdot v \quad \text{für alle } v \quad + \quad \text{Integration:}$

$$\int_\Omega u'' \cdot v = \int_\Omega f \cdot v$$

für "ausreichend glatte" v's:

$$(u' \cdot v)' = u'' \cdot v + u' \cdot v' \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega u'' \cdot v = \int_\Omega (u' \cdot v)' - u' \cdot v' = u' \cdot v|_1 - u' \cdot v|_0 - \int_\Omega u' \cdot v'$$

Nehme v: $v(0) = v(1) = 0 \Rightarrow$ **schwache Formulierung:** suche u, so dass

$$-\int_\Omega u' \cdot v' = \int_\Omega f \cdot v \quad \forall v : \underbrace{\text{Integrale } \int_\Omega v^2 \text{ und } \int_\Omega (v')^2 \text{ "machen Sinn"}}_{\text{"Sobolevraum" } H^{1(\text{Ableitung})}_{0(\text{Randbedingung})}(\Omega)}$$

Grundidee in 1D

Die schwache Formulierung: suche $u \in H_0^1(\Omega) =: V$ so dass

$$\underbrace{-\int_\Omega u' \cdot v'}_{\text{“Bilinearform” } a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f \cdot v}_{\text{“Funktional” } F(v)} \qquad \forall v \in V$$

Problem: V: unendlichdimensional!

Lösung: ersetze V durch ein **endlichdimensionales** V_h. Suche $u_h \in V_h$:

$$a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h$$

Beispiele:

$V_h := \text{span}\,\{\sin(\pi n x) \mid n \in \{0, 1, 2, \ldots 10\}\}$, $\dim(V_h) = 11$

V_h: Raum der Stückweise linearen Funktionen mit Stützstellen $0,\ 0.2,\ 0.4, 0.7,\ 0.8,\ 1$, $\dim V_h = 4$ (nur die inneren Knoten)

Grundidee in 1D

Zu lösen: $$a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h$$

Ritz-Galerkin: Sei $\{\phi_1, \ldots \phi_N\}$ eine Basis von V_h. Dann $u_h = \sum_{i=1}^{N} v_j \phi_j \quad , \quad v_j = ?$

Verlange: $$a(u_h, \phi_i) = F(\phi_i) \quad \forall i \in \{1, \ldots N\}$$

Beachte:

$$a(u_h, \phi_i) = a(\sum_{j=1}^{N} v_j \phi_j, \phi_i) = -\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{N} v_j \phi_j \right)' \cdot \phi_i' = -\sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \left(\phi_j' \cdot \phi_i' \right) v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a(\phi_j, \phi_i) v_j \stackrel{!}{=} F(\phi_i)$$

Mit $A = (A_{ij}) = (a(\phi_j, \phi_i))$, $b = (b_i) = (F(\phi_i))$ und $v = (v_i)$:

$$\boxed{\underset{\text{Steifigkeitsmatrix}}{A} \; v = \underset{\text{Ladevektor}}{b}}$$

Grundidee in 1D

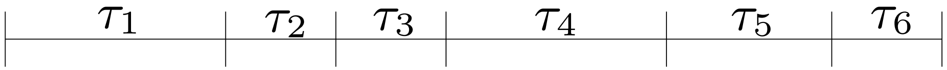
Zu lösen: $$Av = b$$

Wünschenswert:

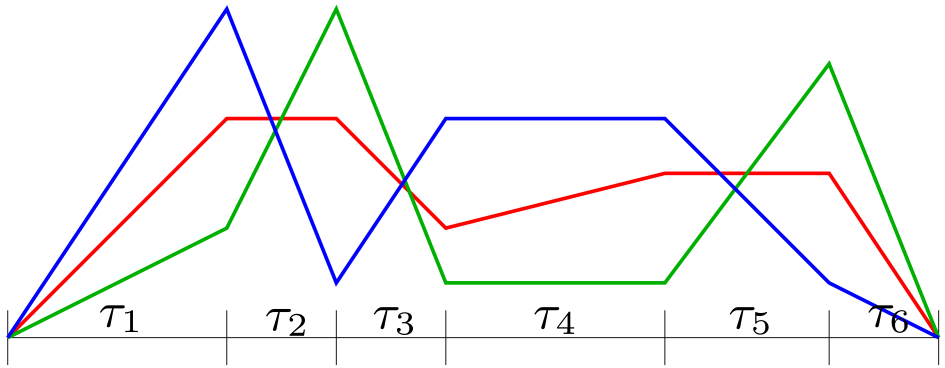
- die Berechnung von A_{ij} soll möglichst einfach sein
- die Matrix A soll möglichst schwachbesetzt sein

FEM:

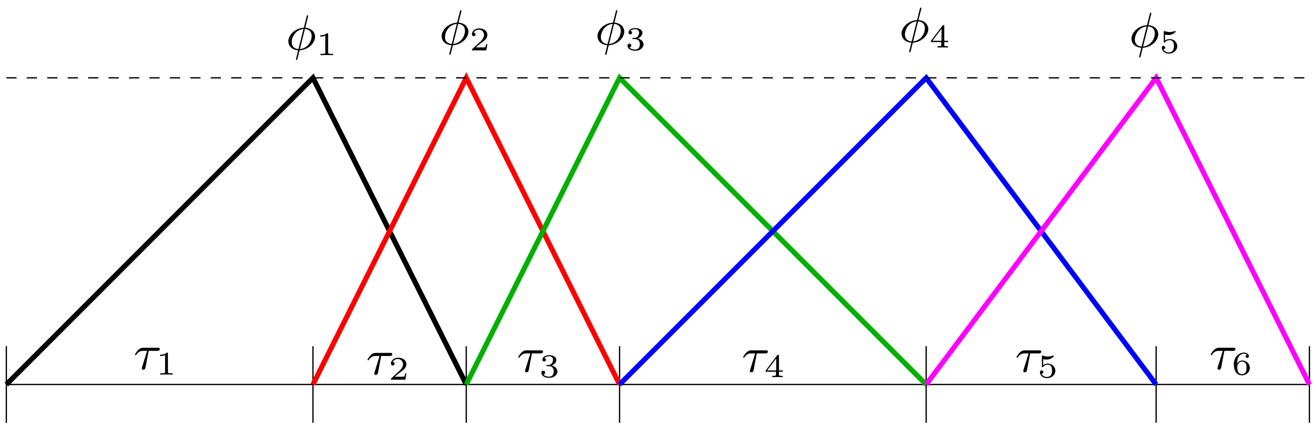
- Zerlege Ω in endlich viele Teilmengen ("Elemente"): $\bar{\Omega} = \cup_{\tau \in T_h} \tau$



- Die Räume V_h enthalten Funktionen, deren Einschränkungen auf $\tau \in T_h$ Polynome sind. Beispiel (stückweise lineare Funktionen):



- Basisfunktionen $\phi_1, \ldots, \phi_N$ von V_h sollten einfach zu berechnen sein und einen möglichst kleinen Träger haben. Beispiel ("Hütchenfunktionen"):



Zusammenfassung:

- kontinuierliches Problem:

$$u'' = f \quad \text{in } \Omega = (0,1) \quad , \quad u(0) = u(1) = 0$$

- schwache Formulierung:

$$a(u,v) := -\int_\Omega u' \cdot v' = \int_\Omega f \cdot v =: F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

- FEM: Suche $u \in V_h$:

$$a(u_h, \phi_i) = F(\phi_i)$$

  $\phi_1, \ldots \phi_N$: eine Basis von V_h (Hütchenfunktionen)

die Welt der bunten Bilder –
zweidimensionale Probleme

FEM in 2D: Schwache Formulierung

1D:

Kontinuierliches Problem: $u'' = f$ in $\Omega = (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$

Schwache Formulierung:

Multipliziere die Gleichung mit einer Funktion v und integriere

FEM: wähle v diskret (z.B., stückweise lineare Funktionen)

2D: genauso!!

Zu lösen: $\partial_{xx}u + \partial_{yy}u = \nabla \cdot \nabla u = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$

Beachte: $\partial_{xx}u + \partial_{yy}u = (\partial_x, \partial_y) \cdot (\partial_x u, \partial_y u) = \nabla \cdot \nabla u$

Schwache Formulierung:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla u &= f \\ (\nabla \cdot \nabla u) \cdot v &= f \cdot v \\ \int_\Omega (\nabla \cdot \nabla u) \cdot v &= \int_\Omega f \cdot v \end{aligned}$$

Beachte: $\nabla \cdot (\nabla u \cdot v) = (\nabla \cdot \nabla u) \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v$

Damit

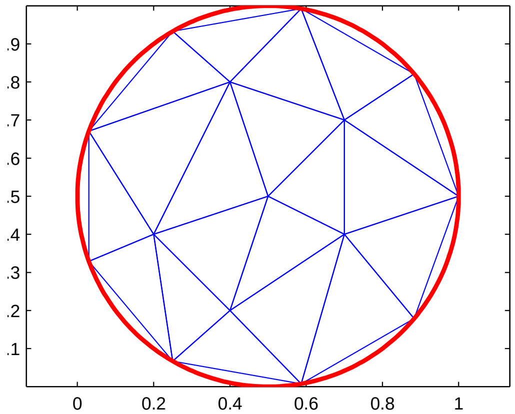
$$\int_\Omega (\nabla \cdot \nabla u) \cdot v = \int_\Omega \nabla \cdot (\nabla u \cdot v) - \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot v) \cdot n - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

$\Rightarrow$ die schwache Formulierung

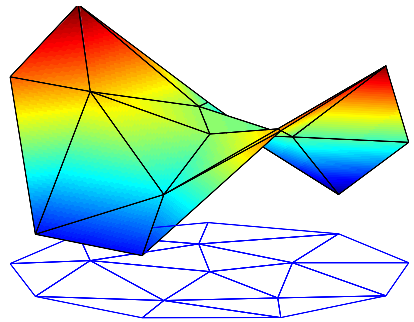
$$\underbrace{-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v}_{\text{Bilinearform } a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f \cdot v}_{\text{Funktional } F(v)} \quad \forall \quad \underbrace{v \in H_0^1(\Omega)}_{\text{d.h. } \int_\Omega v^2 < \infty \text{ und } \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v < \infty}$$

FEM in 2D: Diskretisierung

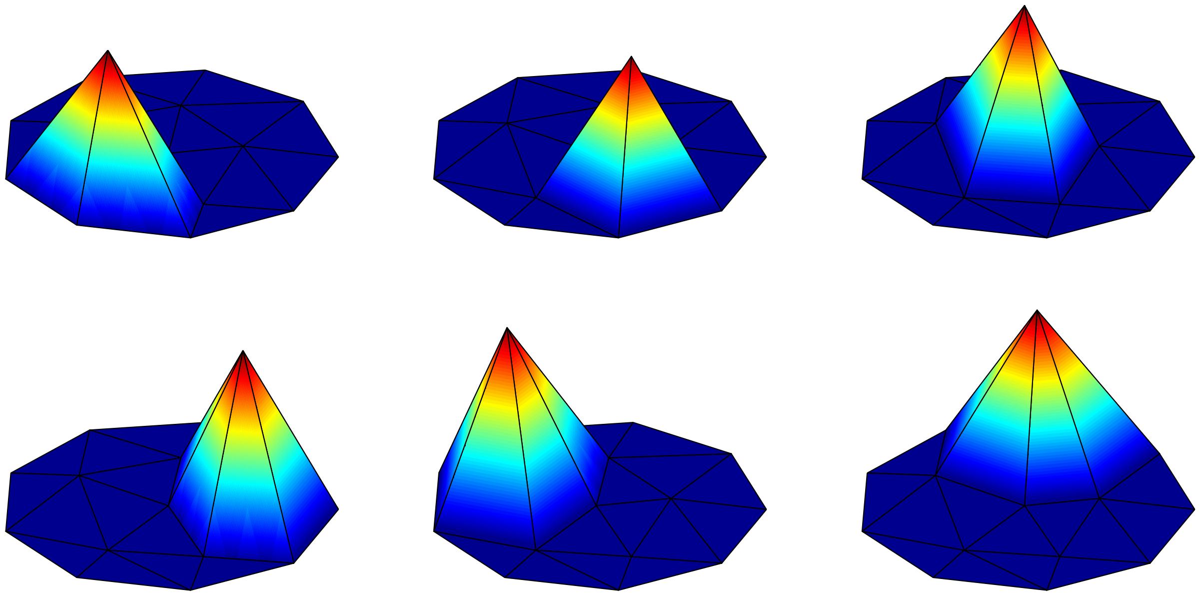
zerlege Ω in Teilgebiete:



Stückweise polynomiale Funktionen (z.B., linear – d.h. P_1 Elemente):



Basisfunktionen (**Nodalbasis**):



FEM in 2D: Gleichungssystem

Diskretes Gleichungssystem:

$$a(u_h, \phi_i) = F(\phi_i) \quad \forall \phi_i \in \{\text{Basis von } V_h\}$$

Setze $u_h = \sum_{j=1}^{N} v_j \phi_j$, dann $(a(u,v) = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v)$

$$a(u_h, \phi_i) = a(\sum_{i=j}^{N} v_j \phi_j,\, \phi_i) = \sum_{i=j}^{N} a(\phi_j, \phi_i) v_j \overset{!}{=} F(\phi_i)$$

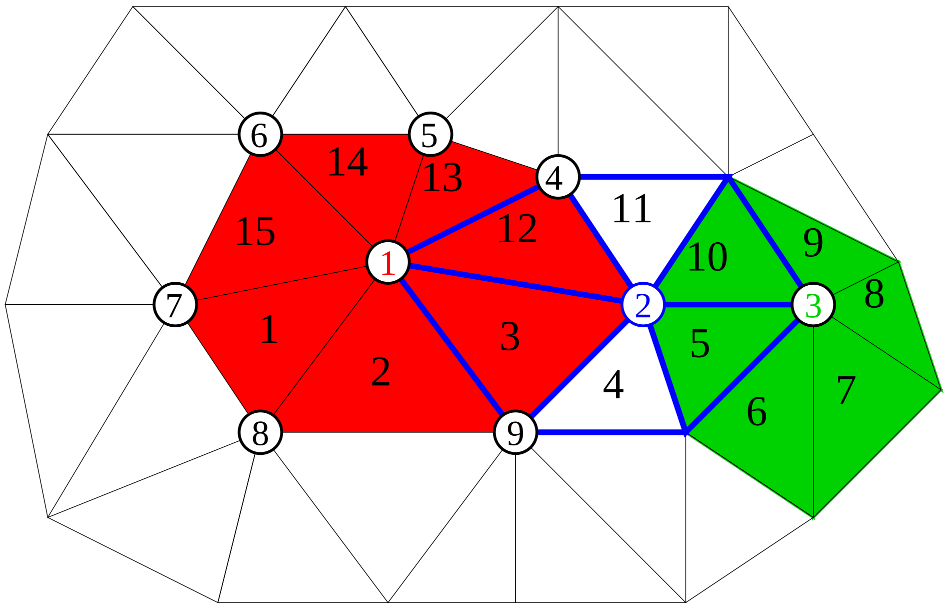
Mit $A = (A_{ij}) = (a(\phi_j, \phi_i))$, $b = (b_i) = (F(\phi_i))$ und $v = (v_i)$:

$$Av = b$$

Bemerkung zur praktischen Realisierung

Hauptarbeit: berechne $A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = -\int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i = \sum_{\tau \in T_h} \int_\tau \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i$

Beispiel:



$$a(\phi_1, \phi_1) = \sum_{m=1,2,3,12,13,14,15} \int_{\tau_m} \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_1$$

$$a(\phi_1, \phi_2) = \sum_{m=3,12} \int_{\tau_m} \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2$$

$$a(\phi_1, \phi_3) = 0$$

Die rechte Seite:

eine Möglichkeit: schreibe

$$f \approx \sum_{j=1}^{N} f_j \phi_j$$

Dann

$$\int_\Omega f \phi_i \approx \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{N} f_j \phi_j \right) \phi_i = \sum_{j=1}^{N} f_j \underbrace{\int_\Omega \phi_j \phi_i}_{\text{berechne ähnlich wie } a(\phi_i, \phi_j)}$$

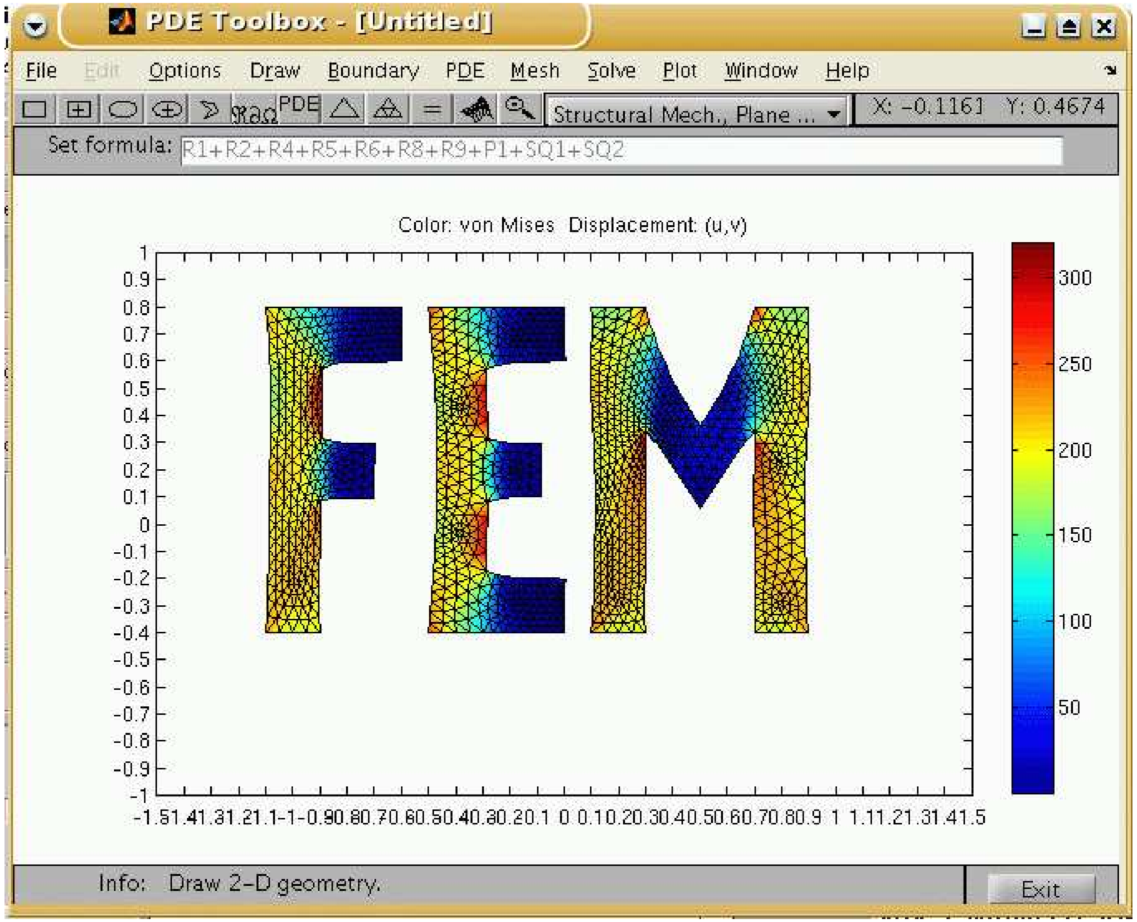
oder: berechne

$$\int_\Omega f \phi_i$$

(fast) exakt!!

PDE Toolbox von Matlab

Was ist das?



"The Partial Differential Equation Toolbox contains tools for the study and solution of partial differential equations (PDEs) in two-space dimensions (2-D) and time. A set of command-line functions and a graphical user interface let you preprocess, solve, and postprocess generic 2-D PDEs for a broad range of engineering and science applications, including structural mechanics, electromagnetics, heat transfer, and diffusion."

[www.mathworks.com]

(Elliptische) Grundgleichungen

Skalare Gleichungen:

linear:

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

nichtlinear:

$$-\nabla \cdot (c(u)\nabla u) + a(u)u = f(u)$$

Randbedingungen:

Dirichlet:

$$hu = r$$

Verallgemeinerte Neumann:

$$n \cdot (c\nabla u) + qu = g$$

Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot(c_{11}\nabla u_1) - \nabla\cdot(c_{12}\nabla u_2) + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 &= f_1 \\ -\nabla\cdot(c_{21}\nabla u_1) - \nabla\cdot(c_{22}\nabla u_2) + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 &= f_2 \end{aligned}$$

Randbedingungen:

Dirichlet:

$$\begin{aligned} h_{11}u_1 + h_{12}u_2 &= r_1 \\ h_{21}u_1 + h_{22}u_2 &= r_2 \end{aligned}$$

Verallgemeinerte Neumann:

$$\begin{aligned} n\cdot(c_{11}\nabla u_1) + n\cdot(c_{12}\nabla u_2) + q_{11}u_1 + q_{12}u_2 &= g_1 \\ n\cdot(c_{21}\nabla u_1) + n\cdot(c_{22}\nabla u_2) + q_{21}u_1 + q_{22}u_2 &= g_2 \end{aligned}$$

oder auch *gemischt*

Benutzung

PDE-Toolbox hat die typischen Bausteine eines (kommerziellen) FEA (Finite Element Analysis)-Werkzeugs:

Benutzer

Pre-prozess

Baue das FE Modell (Geometrie, Materialparameter, usw). Nicht selten: Auswahl der Methoden, Algorithmen

$\Downarrow$

Prozess

Durchführung numerischer Berechungen (oft eine “Black Box” für Benutzer)

$\Downarrow$

Benutzer

Post-prozess

Analysiere die Ergebnisse

Literatur

[1] R. Rannacher. *Numerische Mathematik 3 (Numerik von Problemen der Kontinuumsmechanik), Vorlesungsskriptum WS 2006/2007*, Heidelberg

[2] R. Rannacher. *Numerische Mathematik 2 (Numerik Partieller Differentialgleichungen), Vorlesungsskriptum SS 2006*, Heidelberg

[3] D. Braess. *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*, Springer, 2003