Universität Konstanz *WS 14/15*
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Schropp, S. Trenz

Übungen zu **Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/thnumpdg.html

Blatt 7

Abgabe: Montag, 15.12.2014, bis spätestens 15.00 Uhr!
(Briefkästen 19 und 20)

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Points)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein zusammenhängendes Gebiet mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Es sei

$$D_\psi = \{u \in C(\bar{\Omega}) \mid \ u(x) = \psi \text{ für } x \in \partial\Omega\}.$$

Wir betrachten den Differentialoperator L:

$$L : C^2(\Omega) \cap D_0 \longrightarrow C(\Omega) \quad , \quad Lu = -\Delta u\,.$$

Zeigen Sie:

i) $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ für $u, v \in C^2(\Omega) \cap D_0$,

ii) L ist positiv definit.

Das Skalarprodukt von zwei auf Ω definierten Funktionen u und v ist gegeben durch

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Points)

Vorgelegt sei die Aufgabe

$$-\Delta u \;=\; 0 \;\text{ in } \Omega, \quad u \;=\; \gamma \;\text{ auf } \partial\Omega, \tag{1}$$

$\Omega \in \mathbb{R}^2$ beschränktes Gebiet mit stückweise stetig differenzierbarem Rand $\partial\Omega$.
a) Zeigen Sie für die Lösung $\bar{u}$ von (1) ohne Zuhilfenahme des Maximum-Minimumprinzips die Abschätzungen

$$M_0 \;\le \bar{u}(x, y) \le M_1$$

mit

$$M_0 \quad = \min\{\bar{u}(x,y);\ (x,y) \in \partial\Omega\}, \qquad M_1 \quad = \max\{\bar{u}(x,y);\ (x,y) \in \partial\Omega\}.$$

b) Es sei jetzt $\Omega =]0,1[^2$, $h = \frac{1}{M} > 0$ und

$$\Omega_h = \{(ih, jh);\ i,j \in \{1, ..., M-1\}\}.$$

$A^h u^h = r^h$ sei das Gleichungssystem des klassischen Differenzenverfahrens der Schrittweite $h > 0$ zu (1). Zeigen Sie:

$$M_0 \quad \leq u^h(ih, jh) \leq M_1$$

für $0 < h \leq h_0,\ i,j \in \{1, ..., M-1\}$.

Aufgabe 3 (Theorie) (6 Punkte)

Es sei A^h die Matrix des klassischen Differenzenverfahrens mit Schrittweite $h = 1/M$ zur Randwertaufgabe $-\Delta u = g$ in $\Omega =]0,1[^2$, $u = \gamma$ auf $\partial\Omega$. Weisen Sie nach, dass die Vektoren $u^{kl} \in \mathbb{R}^{\Omega_h}$, $h = 1/M$,

$$(u^{kl})_{ij} \quad = \quad \sin\left(\frac{ik\pi}{M}\right) \sin\left(\frac{jl\pi}{M}\right), \quad 1 \leq i,j \leq M-1$$

Eigenvektoren von A^h sind. Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte λ_{kl}? Berechnen Sie $\lim\limits_{h\to 0} \lambda_{kl}(h)$.