Universität Konstanz *WS 14/15*
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Schropp, S. Trenz

ÜBUNGEN ZU **Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/thnumpdg.html

Blatt 8

Abgabe: 07.01.2015, spätestens 12.00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \lambda v \text{ in } \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Eine Lösung $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), v \neq 0$ heißt Eigenfunktion zum Eigenwert λ.
a) Zeigen Sie: Für jeden Eigenwert λ von (1) gilt $\lambda > 0$.
b) Seien v_1, v_2 Eigenfunktionen zu Eigenwerten λ_1 und λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann sind v_1, v_2 orthogonal bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle u, w\rangle = \int_\Omega u(x)w(x)dx.$$

c) Berechnen Sie die Eigenwerte von (1) im Fall $\Omega =]0,1[^2$ explizit und vergleichen Sie sie mit denen von Aufgabe 3, Blatt 7. Verwenden Sie hierzu den *Separationsansatz* $v(x_1, x_2) = w(x_1)z(x_2)$.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Vorgelegt sei das lineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (0,1), \\ u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta \end{cases} \tag{2}$$

für auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ stetigen Funktionen b, c, f mit $c > 0$, sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Diskretisieren Sie das Problem (2) für eine Schrittweite $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, und approximieren Sie $u''(x)$ und $u'(x)$ mittels *zentraler Differenzenquotienten*. Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem auf und untersuchen Sie dieses auf Lösbarkeit. Wann ist die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems zeilendiagonaldominant? Was ändert sich, wenn $u'(x)$ mittels sogenanntem *Aufwind-Differenzenquotient* approximiert wird:

$$u'(x) \approx \begin{cases} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} & \text{falls } b(x) < 0, \\ \frac{u(x)-u(x-h)}{h} & \text{falls } b(x) \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Hinweis: Die $n \times n$ Matrix $A = (a_{ik})_{i=1\ldots n, k=1\ldots n}$ heißt *zeilendiagonaldominant*, falls gilt

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ik}| \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

(vgl. Skript Numerik I, Seite 16).

Bemerkung: Die Differenzenapproximation (3) mittles Aufwind-Differenzenquotient ist insbesondere bei singulär gestörten Problemen sehr hilfreich.

Aufgabe 3 (Matlab) (8 Punkte)

Es sei $\Omega = (a, b)^2$ und $h = \frac{b-a}{M}$ mit $M \in \mathbb{N}$. Lösen Sie numerisch die Aufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x, y) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= g(x, y) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit dem klassischen Differenzenverfahren für $a = 0$ und $b = 1$ und folgenden Funktionen f und g:

1. $f(x, y) = 0,$ $\qquad g(x, y) = y \cos(4\pi x)$
2. $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |x - 0.5| + |y - 0.5| \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ $\qquad g(x, y) = 0$

Verwenden Sie für die Diskretisierung von Ω die natürliche, zeilenweise von links unten nach rechts oben verlaufende Nummerierung der Gitterpunkte. Schreiben Sie hierzu ein Matlab-File `cfdm.m` für die Matlab-Funktion

```
function [U] = cfdm(M,a,b,hf,hg)
```

die eine Lösungsmatrix `U` $\in \mathbb{R}^{(M+1)\times(M+1)}$ entsprechend der Diskretisierung (inklusive der Werte auf dem Rand!) zurückgibt. Als Übergabewerte soll die Funktion **ausschließlich und in dieser Reihenfolge** die Anzahl an diskreten Gitterabschnitten für eine Koordinatenrichtung `M` (siehe Vorlesung), die Intervallgrenzen `a` und `b`, sowie Function Handles `hf` und `hg` für die Funktionen f und g akzeptieren. Rufen Sie diese Funktion in einem Main-File `main.m` für gegebene Funktionen f und g sowie verschiedene M auf und visualisieren Sie die erhaltene Lösung u sowie die dazu gehörige Funktion f auf dem Gitter. Was beobachten Sie?

Anmerkung: Folgende Matlab Befehle können hilfreich sein: `ndgrid`, `spdiags`, `reshape`, `sparse`, `find`. Sollten Sie mit einigen Befehlen weniger vertraut sein, können Sie mit dem `help`-Befehl und anschließendem Befehlsnamen, z.B.

```
» help handle
```

im Matlab Command Window die jeweilige Hilfeseite aufrufen.

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an den jeweiligen Tutor.
- Drucken Sie den Quellcode aus und geben Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben ab.