

## ÜBUNGEN ZU Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

<http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/thnumpdg.html>

### Blatt 9

**Abgabe: 13.01.2015, spätestens 12.00 Uhr (Briefkasten)**

#### Aufgabe 1 (Theorie)

(6 Punkte)

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  symmetrisch und positiv definit. Die Vektoren  $d_0, d_1, \dots, d_{N-1} \in \mathbb{R}^N$  heißen *konjugiert* oder *A-orthogonal*, falls  $d_i^T A d_j = 0$  für  $i \neq j$ ,  $0 \leq i, j \leq N-1$  und  $d_i^T A d_i \neq 0$  für  $0 \leq i \leq N-1$ .

- a) Verifizieren Sie, dass  $d_0, d_1, \dots, d_{N-1}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^N$  bilden.  
b) Gegeben sei das Gleichungssystem  $Ax = b$ . Zeigen Sie: Zerlegt man die Lösung  $x = A^{-1}b$  nach der Basis  $d_0, \dots, d_{N-1}$ , so gilt

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k d_k \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{d_k^T A x}{d_k^T A d_k}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

- c) Zeigen Sie: Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  liefert die durch

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{-d_k^T (A x_k - b)}{d_k^T A d_k}$$

für  $k \geq 0$  erzeugte Folge nach höchstens  $N$  Schritten die Lösung  $x_N = A^{-1}b$ .

#### Aufgabe 2 (Theorie)

(6 Punkte)

- a) Zu  $e > 0$ ,  $e \in \mathbb{R}^N$  wird durch

$$\|u\|_e = \max \left\{ \frac{|u_i|}{e_i}; i = 1, \dots, N \right\}$$

eine gewichtete Maximumsnorm auf  $\mathbb{R}^N$  erklärt. Es sei nun  $P \in \mathbb{R}^{N,N}$ . Zeigen Sie: Mit der  $\|\cdot\|_e$  zugeordneten Matrixnorm gilt

$$\|P\|_e = \|Pe\|_e, \quad \text{falls } P \geq 0.$$

b) Es sei  $v \in C^3([-a, a])$  für ein  $a > 0$ . Zeigen Sie: Für  $\mu_0, \mu_1 \in ]0, 1]$  und  $h < a$  gilt

$$\left| \frac{2}{\mu_0 \mu_1 (\mu_0 + \mu_1) h^2} \left( \mu_0 v(\mu_1 h) - (\mu_0 + \mu_1) v(0) + \mu_1 v(-\mu_0 h) \right) - v''(0) \right| \leq \frac{2h}{3} \max\{|v^{(3)}(x)|; x \in [-a, a]\}$$

**Aufgabe 3** (Matlab)

(8 Punkte)

Wir betrachten eine numerisch effiziente Methode zur Lösung von großen linearen Gleichungssystemen der Form  $Ax = b$ , das *konjugierte Gradienten Verfahren* (siehe Algorithmus 1). Dieses stellt insbesondere als *iteratives* Verfahren eine Alternative zu klassischen direkten Lösungsmethoden linearer Gleichungssysteme dar, die z.B. aus der FD-Diskretisierung elliptischer Randwertprobleme resultieren.

Schreiben Sie ein Matlab-File `mycg.m` für die Funktion

```
function [x,normr,niter] = mycg(A,b,x0,tol)
```

die als Übergabewerte **ausschließlich und in dieser Reihenfolge** die Matrix **A**, die rechte Seite **b**, einen Startwert **x0** und eine Toleranz **tol** akzeptiert. Als Rückgabe erhält man die Lösung **x**, sowie die Gesamtanzahl an Iterationen **niter** und einen Residuumsvektor **normr** der Länge **niter**, der als Einträge die Normen der Residuen pro Iteration enthält.

Betrachten Sie nun hierzu die Problemstellung auf Blatt 8, Aufgabe 3, mit  $f(x, y) = 20$  und  $g(x, y) = y \cos(4\pi x)$  und lösen Sie das lineare Gleichungssystem, indem Sie das CG-Verfahren in einem `main.m`-File für verschiedene  $M = 10, 20, 40, 80$  und Toleranzen  $\tau = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$  aufrufen. Wählen Sie zunächst als Startwert den Nullvektor  $x_0 = \mathbf{0}$ .

1. Plotten Sie für jeden Aufruf die erhaltenen Normen der Residuen im Iterationsverlauf (Hinweis: hier könnte der Matlab Plotbefehl `semilogy` hilfreich sein).
2. Schreiben Sie die erhaltene Anzahl an Iterationen in eine Tabelle:

$\tau$	$M$			
	10	20	40	80
$10^{-1}$				
$10^{-2}$				
$10^{-4}$				
$10^{-6}$				

3. Lösen Sie das Gleichungssystem  $Ax = b$  mittels *LU*-Zerlegung und dem Backslash-Operator “`\`”. Vergleichen Sie die Differenz der Lösung mit der aus dem CG-Verfahren in der 2-Norm sowie die Rechenzeit unter Verwendung von `tic` und `toc` für verschiedene  $M$  und  $\tau$ . Was beobachten Sie?

4. Was stellen Sie fest, wenn Sie als Startvektor  $x_0$  nicht den Nullvektor verwenden?

---

**Algorithm 1** Conjugate Gradient Method

---

**Require:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , Tolerance  $\tau \geq 0$

**Ensure:**  $A$  is positive definite

$k = 0;$

$r^0 = b - Ax^0;$

$p^0 = r^0;$

**while**  $\|r_k\| \geq \tau$  **do**

$\alpha_k = \frac{(p^k)^T r^k}{(p^k)^T A p^k};$

$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k;$

$r^{k+1} = r^k - \alpha_k A p^k;$

$\beta_k = \frac{(A p^k)^T r^{k+1}}{(A p^k)^T p^k};$

$p^{k+1} = r^{k+1} - \beta_k p^k;$

$k = k + 1;$

**end while**

---

**Hinweise zur Abgabe:**

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an den jeweiligen Tutor.
- Drucken Sie den Quellcode aus und geben Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben ab.