

ÜBUNGEN ZU Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

<http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/thnumpdg.html>

Blatt 10

Abgabe: 20.01.2015, spätestens 12.00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Es sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) := |x|$, $x \in \Omega$, die *Betragsfunktion*. Zeigen Sie: u besitzt die schwache Ableitung

$$u'(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -1 < x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x < 1, \end{cases} \quad (1)$$

und $u' \in L^2(\Omega)$. Weisen Sie anschließend nach, dass u' keine schwache Ableitung besitzen kann.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g && \text{in } \Omega, \\ u &= \gamma_1 && \text{auf } \Gamma_1, \\ \alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} &= \gamma_2 && \text{auf } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2)$$

auf einem beschränkten Gebiet Ω des \mathbb{R}^2 mit glattem Rand $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ für Funktionen $\alpha, \gamma_2 \in C(\Gamma_2)$, $\gamma_1 \in C(\Gamma_1)$ und $g \in C(\bar{\Omega})$. Ferner sei

$$D_\psi = \{u \in C(\bar{\Omega}) \mid u = \psi \text{ auf } \Gamma_1\},$$

und $\bar{u} \in C^2(\bar{\Omega}) \cap D_{\gamma_1}$.

Zeigen Sie mit den Mitteln der Vorlesung die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- i) \bar{u} löst die Randwertaufgabe (2).
- ii) \bar{u} ist ein stationärer Punkt des Funktionals $I : V_{\gamma_1} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - g u \, d(x, y) + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{2} \alpha u^2 - \gamma_2 u \, dS,$$

wobei $V_\psi = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = \psi \text{ auf } \Gamma_1\}$.

iii) $u = \bar{u} \in V_{\gamma_1}$ erfüllt

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - g v \, d(x, y) + \int_{\Gamma_2} (\alpha u - \gamma_2) v \, dS = 0$$

für alle $v \in V_0$.

Hinweise:

1) Berechnen Sie für die Äquivalenz “ii) \Leftrightarrow iii)” den Ausdruck

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\bar{u} + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0}.$$

2) Für $v \in H^2(\Omega)$ und $w \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, d(x, y) = - \int_{\Omega} \Delta v w \, d(x, y) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} w \, dS,$$

wobei n die *äußere Einheitsnormale* ist. Die Verallgemeinerung der Greenschen Formel für H^1 -Funktionen ist **nicht zu beweisen** und kann so verwendet werden.

Aufgabe 3 (Matlab)

(8 Punkte)

Diese Aufgabe soll einen Einstieg in eine nützliche Matlab Applikation zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen geben, die *PDE Toolbox*. Wir betrachten dazu die folgende Problemstellung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{1}{10}(x^2 + y^2) && \text{in } \Omega, \\ u &= 1, && \text{auf } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \Gamma_2. \end{aligned} \tag{3}$$

für das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\Omega := \left(((-8, 8) \times (-2, 2)) \cup K_6((0, 0)) \right) \setminus \left(\bar{K}_2((0, a)) \cup \bar{K}_2((-a, -b)) \cup \bar{K}_2((a, -b)) \right),$$

und den Rändern

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \partial \left(((-8, 8) \times (-2, 2)) \cup K_6((0, 0)) \right), \\ \Gamma_2 &= \partial \left(\bar{K}_2((0, a)) \cup \bar{K}_2((-a, -b)) \cup \bar{K}_2((a, -b)) \right), \end{aligned}$$

mit $a = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $b = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Hierbei bezeichnen $K_r((x, y))$ und $\bar{K}_r((x, y))$ den *offenen* bzw. *abgeschlossenen Kreis* um den Punkt (x, y) mit Radius $r > 0$, siehe Abbildung 1.

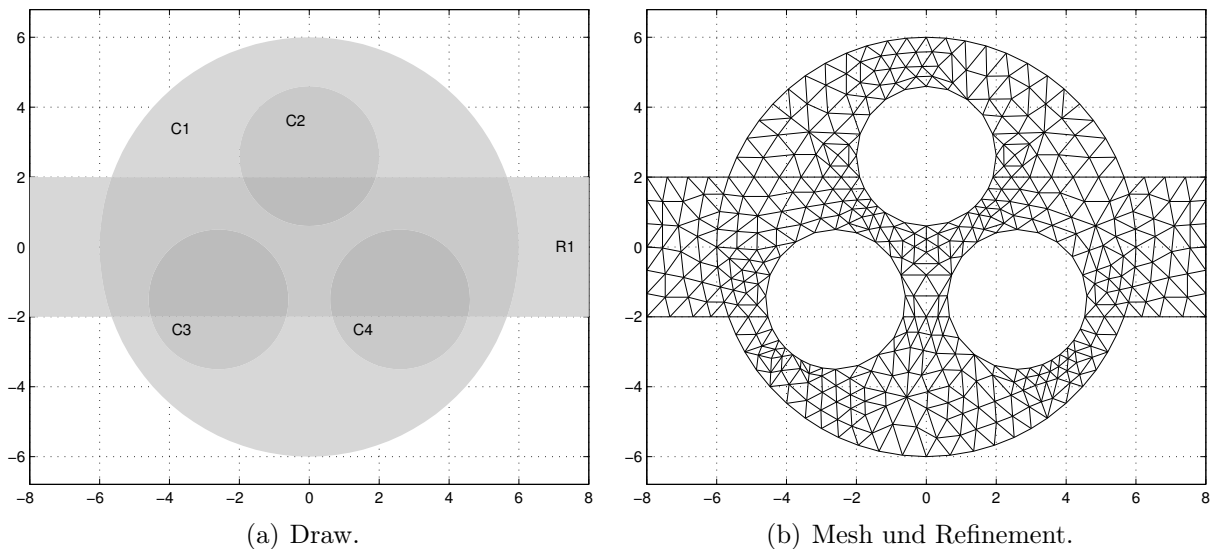


Abbildung 1: Gebiet Ω .

Lösen Sie (3) auf Ω mittels der Methode der Finiten Elemente in Matlab. Starten Sie hierzu die grafische Benutzeroberfläche der PDE Toolbox mit dem Befehl `pdetool`. Zeichnen Sie zunächst das Gebiet mittels **Draw** und beachten Sie anschließend für die Exklusion von Teilgebieten die Option **Set formula**. Führen Sie nacheinander die Schritte **Boundary**, **PDE**, **Mesh** und **Solve** aus. Plotten Sie die Lösung inklusive Gitter.

Die von Ihnen durchgeführten Schritte können am Ende als eine ausführbare Matlab *.m-Datei gespeichert werden (**File/Save as**). Schicken Sie diese Datei per E-Mail an den jeweiligen Übungsleiter.

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an den jeweiligen Tutor.
- Drucken Sie den Quellcode aus und geben Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben ab.