

ÜBUNGEN ZU Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

<http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/thnumpdg.html>

Blatt 11

Abgabe: 27.01.2015, spätestens 12.00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 1 (Theorie)

(6 Punkte)

Beweisen Sie das *Lemma von Aubin-Nitsche* in der folgenden Form: Besitzt das *duale Problem*

$$a(v, z) = b(v) = \int_{\Omega} g \cdot v \, dx \quad \forall v \in V$$

für $g \in L^2(\Omega)$ eine Lösung $z \in H^2(\Omega)$ mit

$$\|z\|_2 := \|z\|_{H^2} \leq C_1 \|g\|_0 \quad (1)$$

für ein $C_1 > 0$ und

$$\min_{w \in V_h} \|z - w\|_1 \leq C_2 h \|D^2 z\|_0 \quad (2)$$

für ein $C_2 > 0$, wobei

$$\|D^2 z\|_0 := \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} z|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

so gilt:

$$\|\bar{u} - u_h\|_0 \leq C h \|\bar{u} - u_h\|_1$$

für ein $C > 0$.

Aufgabe 2 (Theorie)

(6 Punkte)

a) Es sei $\Omega =]0, 1[$, und es sei

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_0^1 u'(x) v'(x) \, dx, \\ \langle u, v \rangle_0 &= \int_0^1 u(x) v(x) \, dx. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Die Normen $\|u\|_0 = \langle u, u \rangle_0^{1/2}$ und $\|u\|_a = a(u, u)^{1/2}$ sind nicht äquivalent, d.h. es gibt kein $C > 0$ mit $\|u\|_a \leq C \|u\|_0$.

Hinweis: Man betrachte die Funktionenfamilie $v_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 2$ definiert durch

$$v_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{falls } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ n - nx, & \text{falls } 1 - \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

b) Vorgelegt sei die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} u + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} u + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} u &= g \text{ in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

mit $g \in C(\bar{\Omega})$. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$, welches die strikte Kegelbedingung erfülle. Leiten Sie die zu (3) gehörige schwache Formulierung ab.

Hinweis: Für $V := \{u \in H^2(\Omega) \mid v = \nabla v \cdot n = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ darf die Dichtheit von C_0^∞ in V bzgl. $\|\cdot\|_{H^2}$ benutzt werden.

Aufgabe 3 (Matlab)

(8 Punkte)

Gegeben sei die im Ort eindimensionale *Reaktion-Transport-Gleichung*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - ku \quad \text{in } \Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) &= 1 - x, \quad \text{in } \Omega, \\ u(a, t) &= 1 \quad \text{in } [0, T], \\ u(b, t) &= 0 \quad \text{in } [0, T], \end{aligned} \quad (4)$$

für $\Omega = (a, b)$. Lösen Sie das zu (4) gehörige Liniensystem mit dem ϑ -Verfahren. Schreiben Sie hierzu ein Matlab-File `thetamethod.m` für die Matlab-Funktion

```
function [U,dx,dt,q] = thetamethod(M,a,b,N,T,k,theta)
```

die eine Lösungsmatrix $U \in \mathbb{R}^{(M+1) \times (N+1)}$ entsprechend der Diskretisierung (inklusive der Werte auf dem Rand!), die örtliche und zeitliche Diskretisierungsschrittweite Δx und Δt , als auch den Quotienten aus Zeitschrittweite und dem Quadrat der Ortsschrittweite

$$q = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (5)$$

zurückgibt. Als Übergabewerte soll die Funktion **ausschließlich und in dieser Reihenfolge** die Anzahl an diskreten Ortsschritten M , die Intervallgrenzen a und b , die Anzahl an diskreten Zeitschritten N , den Endzeitpunkt T , die Dämpfung k sowie den Parameter ϑ akzeptieren. Rufen Sie diese Funktion in einem File `main.m` für $a = 0$, $b = 1$, $T = 0.1$ und $k = 10$, sowie verschiedene

$$\begin{aligned} M &\in \mathcal{M} = \{20, 40\}, \\ N &\in \mathcal{N} = \{1, 10, 100, 1000\}, \\ \vartheta &\in \Theta = \{0, 0.5, 1\}, \end{aligned}$$

auf. Plotten Sie anschließend **für jede Kombination** $(M, \vartheta) \in \mathcal{M} \times \Theta$ die zugehörigen Lösungen für alle $N \in \mathcal{N}$ jeweils nur am Endzeitpunkt T zusammen in einem Plot. Stimmen ihre Beobachtungen mit der Theorie überein?

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an den jeweiligen Tutor.
- Drucken Sie den Quellcode aus und geben Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben ab.