

ÜBUNGEN ZU Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

<http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/thnumpdg.html>

Blatt 12

Abgabe: 03.02.2015, spätestens 12.00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 1 (Theorie)

(6 Punkte)

Seien $\Delta t = T/N$, $\Delta x = 1/M > 0$, und es sei $u = (u_i^j)_{0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N}$ eine Gitterfunktion. Es gelte

$$\frac{1}{\Delta t}(u_i^j - u_i^{j-1}) \leq \frac{1}{\Delta x^2}(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j),$$
$$i = 1, \dots, M-1, \quad j = 1, \dots, N.$$

Zeigen Sie, dass $u = (u_i^j)_{0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N}$ sein Maximum auf einer der Mengen $\{(i, 0); i = 0, \dots, M\}$, $\{(k, j); k \in \{0, M\}, j = 0, \dots, N\}$ annimmt (*diskretes parabolisches Maximumprinzip*).

Aufgabe 2 (Matlab)

(8 Punkte)

Gegeben sei die im Ort eindimensionale hyperbolische *Wellengleichung*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} && \text{in } \Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), && \text{in } \Omega, \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), && \text{in } \Omega, \\ u(a, t) &= \gamma_a(t) && \text{in } [0, T], \\ u(b, t) &= \gamma_b(t) && \text{in } [0, T], \end{aligned} \tag{1}$$

für $\Omega = [a, b]$ auf dem diskreten Ort-Zeit-Gitter

$$\begin{aligned} \Omega_h &= \{(i\Delta x, j\Delta t) \mid i = 1, \dots, M-1, j = 0, \dots, N\}, \\ \Delta x &= \frac{b-a}{M}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}, \quad h = (\Delta x, \Delta t), \end{aligned}$$

mit $u_i^j = u(i\Delta x, j\Delta t)$ und $v^j = (u_1^j, \dots, u_{M-1}^j)$ für $j = 1, \dots, N$. Implementieren Sie für (1) das folgende ϑ -Verfahren:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t^2} I + \vartheta \Gamma \right) v^{j+1} &= \frac{1}{\Delta t^2} (2v^j - v^{j-1}) + \vartheta r^{j+1} + (1 - 2\vartheta) (-\Gamma v^j + r^j) \\ &\quad + \vartheta (-\Gamma v^{j-1} + r^{j-1}) \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, N - 1$, mit den Startdaten

$$v^0 = (u_0(x_1), \dots, u_0(x_{M-1})),$$

$$\frac{1}{\Delta t}(v^1 - v^0) = (u_1(x_1), \dots, u_1(x_{M-1})) + \frac{\Delta t}{2}c^2 (u_0''(x_1), \dots, u_0''(x_{M-1})),$$

und

$$\Gamma = \frac{c^2}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad r^j = \frac{c^2}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} \gamma_a(t_j) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_b(t_j) \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie folgendes Setting:

$$a = 0, b = 1, \quad T = 2, \quad c = 1.0,$$

$$u_0(x) = \sin(\pi x), \quad u_1(x) = 0, \quad \gamma_0(t) = \gamma_1(t) = 0.$$

- a) Lösen Sie (1) mit dem ϑ -Verfahren für $\vartheta = \frac{1}{2}$ und $M = 100$, $N = 500$. Plotten Sie dabei die Lösung für jeden diskreten Zeitschritt in $[0, T]$ in ein x - $u(x, t)$ -Schaubild. **Hinweis:** Hier können die Befehle **hold on/hold off** und **clf** hilfreich sein.
- b) Schätzen Sie die Konvergenzordnung p des Verfahrens für $\vartheta = 0$, indem Sie den Fehler

$$\varepsilon(h) = \|u_h - \bar{u}\|_{2,\infty} \quad (2)$$

in der Norm

$$\|w\|_{2,\infty} := \max \left\{ \left(\Delta x \sum_{i=1}^{M-1} (w_i^j)^2 \right)^{1/2} \mid j = 0, \dots, N \right\}, \quad w \in \mathbb{R}^{\Omega_h}, \quad (3)$$

in Abhängigkeit der Schrittweite $h = (\Delta x, \Delta t)$ berechnen. Dabei sind u_h und \bar{u} die numerische und exakte Lösung der Wellengleichung (1). Gehen Sie hierbei folgendermaßen vor:

1. Wählen Sie für $M \in \mathcal{M} = \{10, 20, 40, 80\}$ jeweils ein dazu passendes N_M für die Zeitdiskretisierung durch

$$N_M = 4cM.$$

Dies sichert die Gültigkeit der sogenannten *CFL-Bedingung*: $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{c}$.

2. Berechnen Sie für jedes

$$h_M = (\Delta x_M, \Delta t_M) = \left(\frac{b-a}{M}, \frac{T}{N_M} \right), \quad M \in \mathcal{M} = \{10, 20, 40, 80\},$$

die numerische und exakte Lösung, als auch den dazugehörigen Fehler $\varepsilon(h_M)$.

3. Schätzen Sie die Konvergenzordnung p des Verfahrens unter Verwendung des berechneten Fehlers $\varepsilon(h_M)$ mit der Formel

$$p \approx \frac{\log(\varepsilon(h_M))}{\log(h_M)} \quad (4)$$

für $M \in \mathcal{M} = \{10, 20, 40, 80\}$.

Hinweis: Die exakte Lösung zu (1) ist durch folgende *Formel von d'Alembert* gegeben:

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) - u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds. \quad (5)$$

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an den jeweiligen Tutor.
- Drucken Sie den Quellcode aus und geben Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben ab.