Universität Konstanz WS 15/16
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Trenz, Prof. Dr. S. Volkwein

ÜBUNGEN ZU Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/volkwein/teaching

Blatt 7

Abgabe: Dienstag, 15.12.2015, in der Vorlesung!
Hinweis: Die Übungen hierzu finden **vorgezogen am 15. und 16.12.** statt!

Aufgabe 1 (Theorie) (4 Punkte)

Das Skalarprodukt von zwei auf Ω definierten Funktionen u und v ist gegeben durch

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x\,.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein zusammenhängendes Gebiet mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Es sei

$$D_\psi = \{u \in C(\bar{\Omega}) \mid \; u(x) = \psi \text{ für } x \in \partial\Omega\}.$$

Wir betrachten den Differentialoperator L:

$$L : C^2(\Omega) \cap D_0 \longrightarrow C(\Omega) \quad , \quad Lu = -\Delta u\,.$$

Zeigen Sie:

i) $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ für $u, v \in C^2(\Omega) \cap D_0$,

ii) L ist ein positiv definiter Operator.

Aufgabe 2 (Theorie) (4 Punkte)

Vorgelegt sei die Aufgabe

$$-\Delta u \;=\; 0 \;\text{ in } \Omega, \quad u \;=\; \gamma \;\text{ auf } \partial\Omega, \tag{1}$$

mit beschränktem Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$ und stückweise stetig differenzierbarem Rand $\partial\Omega$.

Beweisen Sie für die Lösung $\bar{u}$ von (1) das *schwache Maximumprinzip* aus der Vorlesung (Satz 1.1) anhand der Abschätzung

$$M_0 \;\le \bar{u}(x, y) \le M_1$$

mit

$$M_0 \quad = \min\{\bar{u}(x,y);\ (x,y) \in \partial\Omega\}, \quad M_1 \quad = \max\{\bar{u}(x,y);\ (x,y) \in \partial\Omega\}.$$

Aufgabe 3 (Matlab) (6 Punkte)

Bitte beachten Sie die Richtlinien zu den Programmieraufgaben!

Betrachten Sie die Tridiagonal-Matrix $T \in \mathcal{S}^N$ aus der Klasse $\mathcal{S}^N$ der symmetrischen $N \times N$-Matrizen mit den Einträgen "2" auf der Haupt- und "-1" jeweils auf der unteren und oberen Nebendiagonale.

a) Initialisieren Sie T in Matlab auf drei unterschiedliche Arten, wobei maximal eine davon mittels Verwendung der `for`-Schleife **effizient** realisiert werden soll.

b) Testen Sie Ihre Implementierung, indem Sie für kleine bis große N die jeweils benötigte Zeit mittels `tic toc` messen. Die Zeitmessung sollte auch die gegebenenfalls benötigte Belegung von Hilfsvariablen oder -vektoren mit einbeziehen. Was stellen Sie fest?

c) Was sollte bei der Verwendung von `for`-Schleifen in Anbetracht einer numerisch effizienten Implementierung auf alle Fälle berücksichtigt werden?

Machen Sie sich mit der Matlab-Funktionalität des *function handle* vertraut (siehe Matlab Dokumentation).

d) Beschreiben Sie kurz, um was es sich dabei handelt.

e) Schreiben Sie ein Matlab-File für die Funktion

```
function [r1,r2] = myfun(fh,gh,x,y,a,b)
```
,

dass die folgenden Berechnungen implementiert und die zugehörigen Ergebnisse zurückgibt:

$$r_1 = f(x,y) \cdot g(x,y), \tag{2}$$

$$r_2 = f(x,a) + g(b,y). \tag{3}$$

Die Funktionen f,g werden dabei als functions handles `fh`, `gh` mit $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ übergeben. Rufen Sie die Funktion in einem `main`-File für folgende Settings auf:

(i) $f(x,y) = x \cdot y$ und $g(x,y) = 2x - y$ für $x = 1$, $y = 4$, $a = 2$, $b = 1$.

(ii) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ und $g(x,y) = 2^{(x+y)}$ für $x = \pi$, $y = 2$, $a = 3$, $b = 1$.

Welche Ergebnisse erhalten Sie? Testen Sie Ihre Implementierung für weitere Funktionen f und g sowie $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.