Universität Konstanz WS 15/16
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Trenz, Prof. Dr. S. Volkwein

Übungen zu **Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/volkwein/teaching

Blatt 8

Abgabe: Dienstag, 22.12.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (4 Punkte)

Gegeben sei das Interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f \in C^4\big((a, b), \mathbb{R}\big)$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $h = \frac{b-a}{n-1}$ und $x_i = a + (i-1)h$ für $i = 1, ..., n$. Zeigen Sie, dass für die Approximation der Ableitungen f' und f'' mittels der verschiedenen Differenzenquotienten bezüglich der Fehlerterme jeweils gilt:

$$
\begin{aligned}
D_x^+ f(x_i) &:= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} && \Longrightarrow && D_x^+ f - f' = O(h),\\
D_x^- f(x_i) &:= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} && \Longrightarrow && D_x^- f - f' = O(h),\\
D_x^C f(x_i) &:= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} && \Longrightarrow && D_x^C f - f' = O(h^2),\\
D_{xx} f(x_i) &:= \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} && \Longrightarrow && D_{xx} f - f'' = O(h^2).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (Theorie) (4 Punkte)

Vorgelegt sei das lineare Randwertproblem

$$
\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (0, 1), \\ u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta \end{cases} \tag{1}
$$

für auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ stetigen Funktionen b, c, f mit $c > 0$, sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Diskretisieren Sie das Problem (1) für eine Schrittweite $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, und approximieren Sie $u''(x)$ und $u'(x)$ mittles *zentraler Differenzenquotienten.* Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem auf und untersuchen Sie dieses auf Lösbarkeit. Wann ist die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems zeilendiagonaldominant? Was ändert sich, wenn $u'(x)$ mittels dem sogenannten *Aufwind-Differenzenquotient* approximiert wird:

$$u'(x) \approx \begin{cases} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} & \text{falls } b(x) < 0, \\ \frac{u(x)-u(x-h)}{h} & \text{falls } b(x) \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Eine Differenzenapproximation mittles Aufwind-Differenzenquotient ist insbesondere bei singulär gestörten Problemen sehr hilfreich.

Hinweis: Die $n \times n$ Matrix $A = (a_{ik})_{i=1\dots n, k=1\dots n}$ heißt *zeilendiagonaldominant*, falls für $i = 1, 2, \dots, n$ gilt:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ik}| \, .$$

Aufgabe 3 (Matlab) **Abgabe verlängert: 07.01.2016!** (6 Punkte)

Bitte beachten Sie die Richtlinien zu den Programmieraufgaben!

Es seien $\Omega = (a,b)^2$ und $h = \frac{b-a}{M}$ mit $M \in \mathbb{N}$ der Anzahl an äquidistanten Gitterabschnitte in *einer* Koordinatenrichtung. Lösen Sie numerisch die Aufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x,y) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= g(x,y) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit dem klassischen Differenzenverfahren für $a = 0$ und $b = 1$ und folgenden Funktionen f und g:

1. $f(x,y) = 0,$ $\qquad g(x,y) = y\cos(4\pi x)$
2. $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |x-0.5| + |y-0.5| \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ $\qquad g(x,y) = 0$

Verwenden Sie für die Diskretisierung von Ω die natürliche, zeilenweise von links unten nach rechts oben verlaufende Nummerierung der Gitterpunkte. Schreiben Sie hierzu ein Matlab-File `cfdm.m` für die Matlab-Funktion

```
function [U] = cfdm(M,a,b,hf,hg)
```

die eine Lösungsmatrix $\mathtt{U} \in \mathbb{R}^{(M+1)\times(M+1)}$ entsprechend der Diskretisierung (inklusive der Werte auf dem Rand!) zurückgibt. Als Übergabewerte soll die Funktion **ausschließlich und in dieser Reihenfolge** die Anzahl an diskreten Gitterabschnitten für eine Koordinatenrichtung `M`, die Intervallgrenzen `a` und `b`, sowie Function Handles `hf` und `hg` für die Funktionen f und g akzeptieren. Rufen Sie diese Funktion in einem Main-File `main.m` für gegebene Funktionen f und g sowie verschiedene M auf und visualisieren Sie die erhaltene Lösung u sowie die dazu gehörige Funktion f auf dem Gitter. Was beobachten Sie?

Anmerkung: Folgende Matlab Befehle können hilfreich sein: `ndgrid`, `spdiags`, `reshape`, `sparse`, `find`. Sollten Sie mit einigen Befehlen weniger vertraut sein, können Sie mit dem `help`-Befehl und anschließendem Befehlsnamen, z.B.

```
» help ndgrid
```

im Matlab Command Window die jeweilige Hilfeseite aufrufen.