Universität Konstanz WS 15/16
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Trenz, Prof. Dr. S. Volkwein

# Übungen zu Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/volkwein/teaching

## Blatt 10

**Abgabe: Dienstag, 19.01.2016, in der Vorlesung!**

**Aufgabe 1** (Theorie) (4 Punkte)

a) Es sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) := |x|$, $x \in \Omega$, die Betragsfunktion. Zeigen Sie: $u$ besitzt die *schwache Ableitung* $u' \in L^2(\Omega)$

$$u'(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -1 < x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x < 1\,. \end{cases}$$

b) Zeigen Sie: Ist eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ strikt (zeilen-)diagonaldominant, so ist sie auch invertierbar.

**Aufgabe 2** (Theorie) (8 Punkte)

Gegeben sei die (elliptische) partielle Differentialgeichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + \alpha\, u(x) &= f(x) \quad \text{in } \Omega\,, \\ u(x) &= 0 \qquad\;\; \text{auf } \Gamma\,, \end{aligned} \tag{1}$$

auf einem beschränkten Gebiet $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ mit Rand $\Gamma = \{a, b\}$ sowie einer Konstanten $\alpha > 0$. Zur numerischen Lösung betrachten wir die äquidistante Ortsdiskretisierung $\Omega^h = \{x_1, ..., x_n\} \subset \Omega$ mit Schrittweite $h = \frac{b-a}{n-1}$ und wollen (1) in ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}\mathrm{u} + \alpha\mathbf{M}\mathrm{u} = \mathrm{f} \tag{2}$$

mit Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektoren $\mathrm{u}, \mathrm{f} \in \mathbb{R}^n$ überführen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Formulieren Sie (1) im schwachen Sinne, indem Sie als Testfunktionen eine endliche Basis $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset H_0^1(\Omega)$ wählen.

2. Setzen Sie für eine Approximation von $u(x)$ den (FE) Galerkin-Ansatz

$$u(x) \approx u^h(x) := \sum_{j=1}^{n} \mathrm{u}_j \, \varphi_j(x)$$

in die schwache Formulierung ein. Leiten Sie das Gleichungssystem (2) für die (FE) Koeffizienten $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, ..., \mathrm{u}_n)^\top$ der (FE) Ansatzfunktionen $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ her, indem Sie die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{M}$ angeben.

3. Definieren Sie für den Test- und Ansatzraum die stückweise linearen *Hütchenfunktionen* $\varphi_i \in H_0^1(\Omega)$, $i \in I = \{1, ..., n\}$, so dass gilt: $\varphi_i(x) = 1$ für $x = x_i$ und $\varphi_i(x) = 0$ für $x = x_j$ mit $i \neq j$. Dabei ist $\varphi_i$ jeweils linear auf den Trägerintervallen $[x_{i-1}, x_i]$ und $[x_i, x_{i+1}]$. Skizzieren Sie $\varphi_i$ zusammen mit $\varphi_{i-1}$ auf einem geeigneten Intervall.

4. Definieren Sie entsprechend die Ableitung $\varphi_i'(x)$, $i \in I$, und skizzieren Sie $\varphi_i'$ zusammen mit $\varphi_{i-1}'$ auf einem geeigneten Intervall.

5. Berechnen Sie nun für die Hütchenfunktionen die Matrix-Einträge von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{M}$ in Abhängigkeit von $h$ explizit. Was fällt Ihnen auf?

**Aufgabe 3** (Matlab) (4 Punkte)

Diese Aufgabe soll einen Einstieg in eine nützliche Matlab Applikation zur Lösung von partiellen Differentialgeichungen geben, die *PDE Toolbox*. Wir betrachten dazu die folgende Problemstellung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{1}{10}(x^2 + y^2) && \text{in } \Omega, \\ u &= 1, && \text{auf } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \Gamma_2. \end{aligned} \tag{3}$$

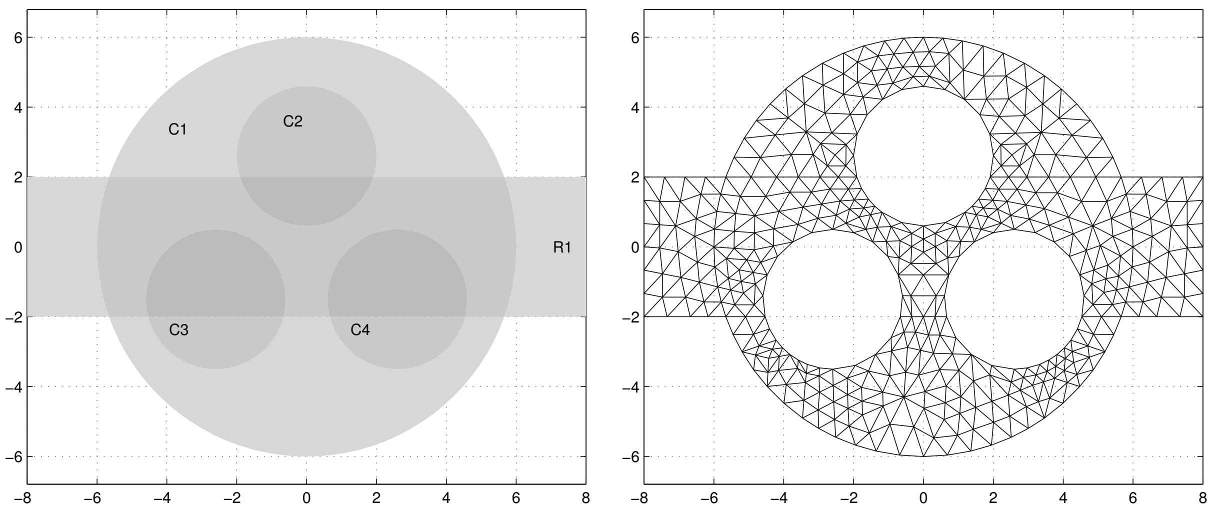
für das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\Omega := \Big(\big((-8,8) \times (-2,2)\big) \cup K_6\big((0,0)\big)\Big) \setminus \Big(\overline{K}_2\big((0,a)\big) \cup \overline{K}_2\big((-a,-b)\big) \cup \bar{K}_2\big((a,-b)\big)\Big),$$

und den Rändern

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \partial\Big(\big((-8,8) \times (-2,2)\big) \cup K_6\big((0,0)\big)\Big), \\ \Gamma_2 &= \partial\Big(\bar{K}_2\big((0,a)\big) \cup \bar{K}_2\big((-a,-b)\big) \cup \bar{K}_2\big((a,-b)\big)\Big), \end{aligned}$$

mit $a = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $b = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Hierbei bezeichnen $K_r\big((x,y)\big)$ und $\overline{K}_r\big((x,y)\big)$ den *offenen* bzw. *abgeschlossenen Kreis* um den Punkt $(x,y)$ mit Radius $r > 0$, siehe Abbildung 1.




(a) Draw. (b) Mesh und Refinement.

Abbildung 1. Gebiet $\Omega$.

Lösen Sie (3) auf $\Omega$ mittels der Methode der Finiten Elemente in Matlab. Starten Sie hierzu die grafische Benutzeroberfläche der PDE Toolbox mit dem Befehl `pdetool`. Zeichnen Sie zunächst das Gebiet mittels **Draw** und beachten Sie anschließend für die Exklusion von Teilgebieten die Option **Set formula**. Führen Sie nacheinander die Schritte **Boundary**, **PDE**, **Mesh** und **Solve** aus. Plotten Sie die Lösung inklusive Gitter.

Die von Ihnen durchgeführten Schritte können am Ende als eine ausführbare Matlab *.m-Datei gespeichert werden (**File/Save as**).