Universität Konstanz WS 15/16
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Trenz, Prof. Dr. S. Volkwein

Übungen zu Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/volkwein/teaching

Blatt 12

Abgabe: Dienstag, 02.02.2016, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (10 Punkte)

Gegeben sei die im Ort eindimensionale hyperbolische *Wellengleichung*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2\, u_{xx} &= f(x,t) && \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_\circ(x), && \text{in } \Omega, \\ u_t(x,0) &= u_\tau(x), && \text{in } \Omega, \\ u(a,t) &= g_a(t) && \text{in } (0,T), \\ u(b,t) &= g_b(t) && \text{in } (0,T), \end{aligned} \tag{1}$$

für $\Omega = [a,b] \subset \mathbb{R}$ auf dem diskreten Ort-Zeit-Gitter

$$\Omega_h = \{(i\Delta x, j\Delta t) \mid i = 1,...,M-1,\ j = 0,...,N\}, \quad \Delta x = \frac{b-a}{M}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}.$$

Wir schreiben für die diskreten Lösungen zum Zeitpunkt $j = 0,...,N$ an allen inneren Ortspunkten $i = 1,...,M-1$

$$\begin{aligned} u^j &= \left(u_1^j, ..., u_{M-1}^j\right)^\top \ \in \mathbb{R}^{M-1}, \\ u_i^j &= u(i\Delta x, j\Delta t) \ \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analoges gilt für die rechten Seiten f und g. Approximieren Sie nun das System, indem Sie für die zweiten Ableitungen sowohl in der Zeit als auch im Ort *zentrale Differenzenquotienten* verwenden.

1) Geben Sie die Iterationsvorschrift zur Berechnung der Lösung zum Zeitpunkt $j+1$ am Ortspunkt i explizit an:
$$u_i^{j+1} = ...$$

2) Mit welchem Problem sehen Sie sich für die Berechnung der ersten Iterierten u^1, d.h. $j = 0$, konfrontiert? Was wäre eine naheliegende Lösung, deren Berechnung nur auf den gegebenen Werten aus (1) basiert?

3) Was ändert sich damit aber für die bisherige Konsistenzordnung des Verfahrens von $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$? Unter welchem "Mehraufwand" kann man die bisherige Konsistenzordnung erhalten? Beschreiben Sie detailliert und nachvollziehbar(!) Ihre Schritte.

4) Die genannte Approximation liefert ein *explizites* Verfahren zur Berechnung der nächsten Iterierten u^{j+1}. Formulieren Sie das Verfahren für $M = 5$ nun *implizit*, indem Sie das hierzu in jedem Zeitschritt j zu lösende lineare System $Au^{j+1} = b$ *an inneren Punkten*(!) konkret anhand der *Systemmatrix* A und der *rechten Seite* b definieren.

Aufgabe 2 (Matlab) (8 Punkte)

Betrachten Sie (1) für $f \equiv 0$ und implementieren Sie hierzu das (implizite) θ-Verfahren

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}\right) = \theta\, F_i^{j+1} + (1-2\theta)F_i^j + \theta\, F_i^{j-1}$$

mit

$$F_i^j = \frac{c^2}{\Delta x^2}\left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right) + f_i^j$$

für ein $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ anhand der folgenden Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\Delta t^2} I + \theta\Gamma\right) u^{j+1} = &\frac{1}{\Delta t^2}\left(2u^j - u^{j-1}\right) + \theta r^{j+1} + (1-2\theta)\left(-\Gamma u^j + r^j\right)\\ &+ \theta\left(-\Gamma u^{j-1} + r^{j-1}\right)\end{aligned}$$

für $j = 1, ..., N-1$, mit den Startdaten

$$\begin{aligned} u^0 &= \left(u_\circ(x_1), ..., u_\circ(x_{M-1})\right),\\ \frac{1}{\Delta t}\left(u^1 - u^0\right) &= \left(u_\tau(x_1), ..., u_\tau(x_{M-1})\right) + \frac{\Delta t}{2} c^2 \left(u_\circ''(x_1), ..., u_\circ''(x_{M-1})\right), \end{aligned}$$

und

$$\Gamma = \frac{c^2}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad r^j = \frac{c^2}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} g_a(t_j)\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ g_b(t_j)\end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie nun folgendes Setting:

$$\begin{aligned} a = 0, b = 1, \qquad & T = 2, \qquad & c = 1.0,\\ u_\circ(x) = \sin(\pi x), \qquad & u_\tau(x) = 0, \qquad & g_a(t) = g_b(t) = 0. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie zunächst eine numerische Approximation der exakten Lösung zu (1), die durch die *Formel von d'Alembert* gegeben ist:

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{2}(u_\circ(x+ct) + u_\circ(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_\tau(s)\,ds. \tag{2}$$

Setzen Sie dazu $M = 100$, $N = 500$ und visualisieren Sie die Lösung für jeden diskreten Zeitschritt t in $[0,T]$ mittels einer Animation wie in Aufgabe 2, Blatt 11. Wir verwenden im Weiteren die berechnete Lösung als Referenzlösung.

b) Lösen Sie nun (1) mit dem θ-Verfahren für $\theta = \frac{1}{2}$ und ergänzen Sie die Visualisierung aus a) durch die von Ihnen berechnete Lösung.

c) Setzen Sie $\theta = 0$ und $N = 100$. Was beobachten Sie?
Hinweis: Hier könnte der Befehl `pause()` zur Verlangsamung der Animation hilfreich sein.