Universität Konstanz *SS 2015*
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Schropp, F. Kleber, S. Trenz

ÜBUNGEN ZU **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html

Blatt 1

Abgabe: Dienstag, 28.04.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Vorgelegt sei die Neumannsche Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda u &= g \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

mit $\lambda \geq 0$, $g \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$ und strikter Kegeleigenschaft. Dabei ist n der äußere Normaleneinheitsvektor.

a) Leiten Sie eine schwache Formulierung für die Aufgabe (1) her.

b) Zeigen Sie: Ist $\lambda > 0$, so existiert genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (1). Hinweise: Satz von Lax-Milgram.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Gegeben sei erneut das Problem (1), dieses Mal aber mit $\lambda = 0$. Zeigen Sie:

(i) Es existiert genau eine schwache Lösung

$$u \in V := \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u\,dx = 0 \right\}$$

von (1). Hinweis: Wenden Sie den Satz von Lax-Milgram an auf den Raum V mit der Norm $\|u\|_V := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}$; dafür benötigen Sie die zweite Poincarésche Ungleichung: Für $u \in H^1(\Omega)$ existiert ein $C_P > 0$ mit

$$\|u\|_{L^2} \leq C_P \left(\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \right)^{1/2} + \left| \int_\Omega u(x)\,dx \right| \right).$$

(ii) Ist u eine klassische Lösung von (1), d. h. $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, so gilt

$$\int_\Omega g\,dx = 0.$$

Aufgabe 3 (Matlab) (9 Punkte)

Wir betrachten die inhomogene Helmholtz-Gleichung

$$-\Delta u + \lambda u = g \text{ in } \Omega \tag{2}$$

versehen mit den Dirichletschen Randbedingungen auf $\partial\Omega$

$$u|_{\partial\Omega} = \gamma. \tag{3}$$

Das Gebiet Ω sei durch $\Omega = A \backslash B$ definiert, wobei

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = (r + \sin(6\varphi))\cos(\varphi), y = (r + \cos(6\varphi))\sin(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi), r \in [0,5)\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Ferner gelte $\lambda = 1/2$ und

$$g(x,y) = \cos(x/2)\sin(y/2) + 1/80(x^2+y^2) - 1/10,$$
$$\gamma(x,y) = \cos(x/2)\sin(y/2) + 1/40(x^2+y^2).$$

Die exakte Lösung zu (2)–(3) lautet

$$\bar{u}(x,y) = \cos(x/2)\sin(y/2) + 1/40(x^2+y^2).$$

Finden Sie mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode aus der PDE-Toolbox von Matlab die numerische Lösung u_h von (2)–(3).

Visualisieren Sie jeweils in einem 3D-Plot

- die numerische Lösung u_h,
- die exakte Lösung $\bar{u}$,
- den Fehler $|\bar{u} - u_h|$.

Hinweise zum Vorgehen:

1. Erstellen Sie zunächst mittels der PDE-Toolbox ein vereinfachtes Template, in dem Sie A als einen Kreis mit Radius $r_A > r_B$ implementieren, so dass gilt: $B \subset A$ und $\Omega = A \setminus B$.
2. Setzen Sie nacheinander die Randbedingungen und PDE-Spezifikationen und verfeinern Sie das Gitter zwei Mal. Lösen Sie anschließend auf dem Gitter und plotten Sie die Lösung. Speichern Sie das Template als m-File.
3. Modifizieren Sie nun dieses Template in den Abschnitten „Geometry description" und „Boundary conditions" entsprechend dem gegebenen A von oben. Approximieren Sie dazu A als einen geschlossenen Polygonzug mit 100 Stützstellen.
4. Ergänzen Sie weiterhin das Template nach dem Abschnitt „Solve PDE" um Visualisierungen der exakten Lösung und des Fehlers mittels `pdeplot`. Für die benötigten Daten verwenden Sie die Funktion

   `[p,e,t,u_h] = getpdetooldata.m,`

welche auf der Homepage zu finden ist.

5. Speichern Sie alles erneut in einem m-File ab.

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *Freya.Bachmann@uni-konstanz.de*.
- Drucken Sie den Quellcode aus und geben Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben ab.