Universität Konstanz *SS 2015*
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Schropp, F. Kleber, S. Trenz

ÜBUNGEN ZU **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html

Blatt 2

Abgabe: Dienstag, 05.05.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Es seien V, W zwei Vektorräume und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit $a(u,u) \geq 0$ für alle $u \in V$, und $b : V \times W \to \mathbb{R}$ sei eine bilineare Abbildung. Ferner sei F ein lineares Funktional auf V und G ein solches auf W.
Zeigen Sie: Ein Paar $(v^*, w^*) \in V \times W$ erfüllt

$$\begin{aligned} a(v^*, x) + b(x, w^*) &= F(x) \quad \text{für alle } x \in V, \\ b(v^*, y) &= G(y) \quad \text{für alle } y \in W \end{aligned}$$

genau dann, wenn für das Funktional $J : V \times W \to \mathbb{R}$,

$$J(v,w) = a(v,v) + 2b(v,w) - 2F(v) - 2G(w)$$

die Sattelpunkteigenschaft

$$J(v^*, w) \leq J(v^*, w^*) \leq J(v, w^*) \quad \text{für alle } v \in V,\ w \in W$$

gilt.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Für $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ sei $P_r(\Gamma) := \{u : \Gamma \to \mathbb{R} : u \text{ ist ein Polynom mit } \deg(u) = r\}$ der Raum der Polynome in zwei Variablen von Grad r. Zeigen Sie: Die Menge $\left\{x^k y^l\right\}_{0 \leq k+l \leq r}$ bildet eine Basis von $P_r(\Gamma)$ und es gilt

$$\dim\left(P_r(\Gamma)\right) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

Aufgabe 3 (Matlab) (9 Punkte)

Vorgelegt sei die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega = (-1,1)^2, \qquad u(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit der rechten Seite $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y) - 4$ für $(x,y) \in \Omega$.

(i) Lösen Sie dieses Problem mit Matlab und gehen Sie dabei nach folgendem Muster vor:

   – Erzeugen Sie ein Geometry- und Boundary-File, indem Sie zunächst mittels der PDE Toolbox das Gebiet zeichnen und die Randbedingungen entsprechend der Angabe setzen. Exportieren Sie nun die Geometry- und Boundary-Daten in den Workspace (siehe Menü „Draw“ und „Boundary“). Zum Erstellen der entsprechenden m-Files verwenden Sie nun die Matlab-Funktionen `decsg` und `wgeom` sowie `wbound` auf den exportierten Daten (siehe Matlab-Hilfe).
   – Schreiben Sie nun ein m-File, in welchem Sie mittels den Matlab-Funktionen `initmesh` und `assempde` die Poisson-Gleichung für verschiedene Gitterdiskretisierungen $h = 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1$ lösen.

(ii) Führen Sie mit den erhaltenen Daten aus (i) eine Konvergenzanalyse in der L^∞-Norm durch, in dem Sie jeweils den Fehler

$$e_h := \|u_{ex} - u_h\|_{L^\infty}$$

für alle h berechnen. Dabei ist u_h die numerische und u_{ex} die exakte Lösung; letztere ist durch $u_{ex}(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) + x^2 + y^2$ gegeben. Geht man für ein $C > 0$ von der Beziehung

$$e_h = Ch^p$$

aus, so kann mittels der Umformung

$$\ln(e_h) = \ln(C) + p\ln(h)$$

die Steigung p der Ausgleichsgeraden durch die Punkte $(\ln(h), \ln(e_h))$ für $h = 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1$ ermittelt werden. Tragen Sie diese Punkte samt der Ausgleichsgeraden in ein Schaubild ein (verwenden Sie dafür die Befehle `polyfit` und `polyval`). Geben Sie die Konvergenzordnung p auf der Konsole aus.

(iii) Zeichnen Sie zum Schluss noch die Triangulierung und die Lösung u_h für $h = 0.1$ jeweils in ein eigenes Schaubild ein.

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *Freya.Bachmann@uni-konstanz.de.*
- Drucken Sie den Quellcode aus und geben Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben ab.