Universität Konstanz *SS 2015*
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Schropp, F. Kleber, S. Trenz

Übungen zu **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

`http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html`

Blatt 3

Abgabe: Dienstag, 12.05.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Seien V und V_h Unterräume eines Hilbertraumes H mit $V_h \not\subset V$. Es sei $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform mit Konstante C, welche koerziv auf V_h ist mit der Konstanten γ. Ferner löse $u \in V$ das Problem

$$a(u, v) \;=\; F(v) \quad \text{für alle } v \in V,$$

wobei $F \in H'$, und $u_h \in V_h$ löse

$$a(u_h, v) \;=\; F(v) \quad \text{für alle } v \in V_h.$$

Zeigen Sie die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_H \;\leq\; & \left(1 + \frac{C}{\gamma}\right) \inf\{\|u - v\|_H : \; v \in V_h\} \\ & + \frac{1}{\gamma} \sup \left\{ \frac{|a(u - u_h, w)|}{\|w\|_H} : \; w \in V_h \backslash \{0\} \right\}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Fast inkompressible Flüssigkeiten mit Geschwindigkeitsfeld u werden z. B. modelliert durch die Minimierung des Funktionals $F : V \to \mathbb{R}$, $V := (H_0^1(\Omega))^2$,

$$F(v) \;=\; \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} |\nabla v_i|^2 + \alpha^{-2} \operatorname{div}(v)^2 - f \cdot v \, dx$$

mit $f \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$ und einem Parameter α, $0 < \alpha \ll 1$.

(i) Stellen Sie die zugehörige Variationsgleichung für das Geschwindigkeitsfeld u auf.

(ii) Setzen Sie $p := \alpha^{-2} \operatorname{div}(u)$ und leiten Sie aus (i) für (u, p) eine weitere Variationsgleichung der Gestalt

$$
\begin{aligned}
a(u,v) + b(v,p) &= \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in V, \\
b(u,q) - s(p,q) &= 0 \text{ für alle } q \in L^2(\Omega)
\end{aligned}
$$

her, welche bis auf einen „Strafterm“ $s(p, q)$ die Sattelpunktform besitzt.

Aufgabe 3 (Visualisierung von Strömungen) (9 Punkte)

Für die Geschwindigkeit $\mathbf{u} = (u, v)^T$ und den Druck p betrachten wir in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ die normierten, stationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$
\begin{aligned}
-\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= 0, &(1)\\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. &(2)
\end{aligned}
$$

Zwei in der Praxis gängige Beispiele zur Visualisierung sind

- die *Poiseuille-Strömung* im Gebiet $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; a_x < x < b_x, \, a_y < y < b_y\}$, $a_x, b_x, a_y, b_y \in \mathbb{R}$ mit
$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{pmatrix} -(y-a_y)(y-b_y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- *Vortex* (Wirbel)
$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$
Auch hier nehmen wir als Gebiet $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; a_x < x < b_x, \, a_y < y < b_y\}$, $a_x, b_x, a_y, b_y \in \mathbb{R}$.

Theorie:

1. Überprüfen Sie, ob die beiden Strömungen *inkompressibel* sind, d. h. (2) erfüllen.
2. Bestimmen Sie den Druck p unter Benutzung der Gleichung (1).

Matlab:

1. Erzeugen Sie in einem m-File auf dem Gebiet $\Omega = (-2, 2)^2$ mittels `meshgrid` ein äquidistantes Gitter mit Schrittweite $h = 0.2$.
2. Machen Sie sich mit den Matlab-Funktionen `contourf` und `quiver` zur Visualisierung des Drucks p und der Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ vertraut.
3. Visualisieren Sie die Konturlinien zum Druck p und das Vektorfeld zur Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ in einem gemeinsamen Plot. Achten Sie dabei auf eine geeignete und aussagekräftige Darstellung (`axis`, `colorbar`, `colormap`, `caxis`, `shading`).
4. Oft werden auch sogenannte *Strömungslinien* zur Visualisierung eingesetzt. Um diese zu berechnen, verwenden Sie die Matlab-Befehle `stream2` und `streamline` und visualisieren Sie mehrere Strömungslinien für beide Strömungen. Welche Einstellungen sind für `stream2` möglich? Was ist der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsfeld und Strömungslinien?

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *Freya.Bachmann@uni-konstanz.de.*
- Drucken Sie den Quellcode aus und geben Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben ab.