Universität Konstanz *SS 2015*
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Schropp, F. Kleber, S. Trenz

Übungen zu **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

`http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html`

Blatt 4

Abgabe: Dienstag, 19.05.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Vorgelegt sei das lineare Gleichungssystem

$$Ac + Bd = f, \quad B^T c = 0 \tag{1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch und positiv definit, $B \in \mathbb{R}^{N\times M}$ mit $\operatorname{rg}(B) = M$, $f, c \in \mathbb{R}^N$, und $d \in \mathbb{R}^M$.

a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem (1) eine eindeutige Lösung (c^*, d^*) besitzt.

b) Das bekannteste Iterationsverfahren zur Lösung von (1) ist der *Uzawa-Algorithmus*: Sei $d^0 \in \mathbb{R}^M$ gegeben und sei $\alpha > 0$ ein Parameter. Bestimme (c^k, d^k) gemäß

$$Ac^k = f - Bd^{k-1}, \quad d^k = d^{k-1} + \alpha B^T c^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Zeigen Sie: Der Uzawa-Algorithmus konvergiert für jedes d^0, falls $\alpha \|B^T A^{-1} B\|_2 < 2$.
Hinweis: Gehen Sie hierbei folgendermaßen vor:

1. Setzen Sie $e^k := d^k - d^*$ und zeigen Sie
$$e^k = C^k e^0, \quad C := I - \alpha B^T A^{-1} B.$$
2. Zeigen Sie nun
$$\|C\|_2 < 1,$$
wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Operatornorm ist und folgern Sie daraus die Konvergenz $d^k \to d^*$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 2 (Finite Elemente in 1D – Theorie) (6 Punkte)

Gegeben sei für $\lambda > 0$ das eindimensionale Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) + \lambda u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

a) Leiten Sie für (2) die schwache Formulierung

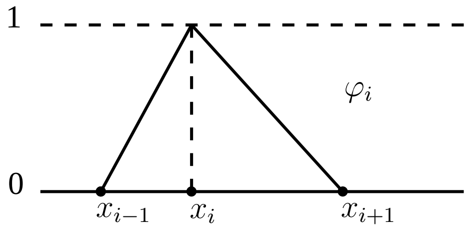
$$a(u, \varphi) = b(\varphi) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

her. Hinweis: Bis auf den $u(x)$-Term in der ersten Zeile von (2) geht dies analog zum zweidimensionalen Fall aus der Vorlesung.

b) Gegeben sei nun eine beliebige Diskretisierung des Intervalls Ω:

$$\Omega_h = \{x_1, \ldots, x_m\}, \quad x_i \in (0, 1).$$

Betrachten Sie für das zu (2) gehörige Galerkin-Verfahren *lineare Ansatz-Funktionen* φ_i, $i = 1, \ldots, m$ (sogenannte „Hütchen-Funktionen“, siehe Abbildung), welche die Eigenschaften



- $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq m)$,
- $\operatorname{supp}(\varphi_i) = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ für $i = 1 \ldots, m$, wobei $x_0 = 0$ und $x_{m+1} = 1$

erfüllen. Leiten Sie nun analog zum zweidimensionalen Fall für diesen Ansatz ein lineares Gleichungssystem in der Form

$$Ac = r, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad c, r \in \mathbb{R}^m$$

her, wobei

$$A = D + \lambda P, \quad D_{ij} = \int_\Omega \varphi_i' \varphi_j' \, dx, \quad P_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx \qquad (1 \leq i, j \leq m),$$
$$r_i = \int_\Omega f \varphi_i \, dx \qquad (1 \leq i \leq m).$$

Gehen Sie hierbei von einer konstanten rechten Seite aus, d. h. $f = k$, $k \in \mathbb{R}$. Konkret bedeutet dies:

(i) Definieren Sie sich die Hütchenfunktionen φ_i auf Ω.

(ii) Berechnen Sie die zugehörigen Ableitungen φ_i' auf Ω.

(iii) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_\Omega \varphi_i' \varphi_j' \, dx, \quad \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx, \quad \int_\Omega f \varphi_i \, dx.$$

Aufgabe 3 (Finite Elemente in 1D – Matlab) (9 Punkte)

Lösen Sie in Matlab das Problem (2) mittels der Methode der finiten Elemente unter Verwendung von linearen Ansatz-Funktionen. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse aus Aufgabe 2 und setzen Sie $\lambda = 1$ sowie $f = 2$.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Implementieren Sie in Matlab die Funktionen

$$\begin{aligned} \texttt{[p,d]} &= \texttt{integratephi(xp,i,j)}, \\ \texttt{[r]} &= \texttt{integraterhs(xp,i,k)}, \end{aligned}$$

   die als Rückgabe die folgenden Integrale berechnen: `p` $= P_{ij}$, `d` $= D_{ij}$ und `r` $= r_i$. Als Eingabeargumente akzeptieren die Funktionen eine **beliebige(!)** Diskretisierung des Intervalls Ω in Form des Vektors `xp`, die Indizes `i` und `j` der beiden zur Integralberechnung benötigten Funktionen φ_i und φ_j sowie eine Konstante `k` für konstante rechte Seiten $f(x) = k$.

2. Schreiben Sie ein Matlab-File, in dem Sie diese Funktionen zur Belegung der Verfahrensmatrix A und der rechten Seite r aufrufen und damit die Problemstellung aus Aufgabe 2 für eine **äquidistante** sowie eine **zufällige** Diskretisierung von Ω lösen (Tipp: siehe Matlab-Funktionen `rand` und `sort`). Plotten Sie die Lösungen in geeignete x-$u(x)$-Diagramme.

3. Lösen Sie (2) ebenfalls mittels dem Verfahren der *zentralen Finite-Differenzen* für eine äquidistante Schrittweite h. Vergleichen Sie die erhaltene FD-Lösung mit der zugehörigen FE-Lösung. Was passiert im Fall $\lambda = 0$? Hinweis: Betrachten Sie die jeweiligen Approximationen für u'', u und f.

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *Freya.Bachmann@uni-konstanz.de.*
- Drucken Sie den Quellcode aus und geben Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben ab.