Universität Konstanz *SS 2015*
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Schropp, F. Kleber, S. Trenz

Übungen zu **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

`http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html`

Blatt 6

Abgabe: Dienstag, 02.06.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Es sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige, auf V elliptische Bilinearform mit Konstanten M und α, und es sei $V_h \subset V$ ein Teilraum. Dann ist die *Ritz-Projektion* $R_h : V \to V_h$ definiert durch

$$v \mapsto R_h v \quad \Longleftrightarrow \quad a(R_h v - v, v_h) = 0 \ \text{ für alle } v_h \in V_h.$$

Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung R_h ist linear und stetig.

(ii) R_h liefert quasioptimale Approximationen, d. h.

$$\|v - R_h v\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf \{\|v - w\|_V : \ w \in V_h\}.$$

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Gegeben sei die parabolische Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in} \quad (0,T) \times \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad \text{in} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Betrachten Sie für Ω die Friedrichs-Keller-Triangulierung aus Blatt 5, Aufgabe 1 und dazu die semidiskrete Differentialgleichung

$$\begin{aligned} Bc'(t) + Ac(t) &= r(t), \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \tag{2}$$

vgl. Formelzeile (2-11) aus dem Vorlesungsskript.

Leiten Sie für lineare Ansatzfunktionen $v_i, \ i = 1, \dots M$ die Matrizen A und B sowie die rechte Seite $r(t)$ aus (2) her. Konkret bedeutet dies: Berechnen Sie die Integrale

$$A_{ij} = \int_\Omega \nabla v_j \cdot \nabla v_i \, d(x,y), \quad B_{ij} = \int_\Omega v_i v_j \, d(x,y), \quad r_i(t) = \int_\Omega f(t,x,y) v_i \, d(x,y)$$

für $1 \le i, j \le M$ nach dem gleichen Muster wie auf Blatt 5, Aufgabe 1.

Hinweis: Um $r_i(t)$ zu berechnen, verwenden Sie auch für f den Galerkin-Ansatz, d. h.

$$f(t,x,y) \approx \sum_{j=1}^{M} f_j(t) v_j \quad \text{mit} \quad f_j(t) := f(t, x_j, y_j),$$

wobei (x_j, y_j) die Koordinaten des Punktes p_j der Triangulierung sind.

Aufgabe 3 (Matlab) (9 Punkte)

Lösen Sie in Matlab das Problem (1) für

$$f(t,x,y) = (\cos(t) + 2\pi^2 \sin(t)) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad \text{und} \quad u_0 = 0,$$

indem Sie auf das aus Aufgabe 2 erhaltene System (2) einen ODE-Solver anwenden. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

1. Wählen Sie $M = 900$ für die Anzahl an Knoten/Basisfunktionen.
2. Betrachten Sie für die Zeitintegration das Intervall $[0, T] = [0, 10]$ und wählen Sie als Schrittweite $\Delta t = 0.1$.
3. Verwenden Sie für die Zeitintegration einmal das implizite Euler-Verfahren und einmal den Matlab-Solver `ode15s`. Nehmen Sie für den Anfangswert c_0 jeweils den Nullvektor.
4. Animieren Sie schließlich die erhaltene Lösung über das Zeitintervall $[0, T]$, d. h. plotten Sie für jeden Zeitpunkt $t \in [0, T]$ die Lösung in ein geeignetes Schaubild (`drawnow` verwenden).
5. Vergleichen Sie zum Schluss noch jeweils Ihre Lösung u_{num} mit der exakten Lösung

   $$u_{ex}(t,x,y) = \sin(t) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

   des Problems (1), indem Sie den Fehler

   $$\max_{t \in [0,T]} \max_{(x,y) \in \Omega} |u_{num} - u_{ex}|$$

   berechnen.

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *Freya.Bachmann@uni-konstanz.de.*