

ÜBUNGEN ZU Numerik partieller Differentialgleichungen II

<http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html>

Blatt 9

Abgabe: Dienstag, 23.06.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie)

(6 Punkte)

Vorgelegt sei die nichtautonome Differentialgleichung

$$w'(t) = \lambda(t)w(t), \quad \lambda(t) \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\lambda(t)) \leq 0 \text{ für } t \geq 0. \quad (1)$$

Ein s -stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Tableau $\frac{c}{b^T} \left| \begin{array}{c} A \\ b^T \end{array} \right.$ heißt *nichtautonom-stabil*, falls für dessen Stabilitätsfunktion

$$R(\Gamma) := 1 + b^T \Gamma (I - A \Gamma)^{-1} \mathbb{I}$$

die Beziehung $|R(\Gamma)| \leq 1$ gilt für alle Matrizen $\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ mit $\operatorname{Re}(\gamma_i) \leq 0$, $i = 1, \dots, s$.

Zeigen Sie: Je zwei Lösungen $(y^m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $(z^m)_{m \in \mathbb{N}}$ von nichtautonom-stabilen Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweite $\Delta t > 0$ angewandt auf die nichtautonome Testgleichung (1) erfüllen

$$|y^{m+1} - z^{m+1}| \leq |y^m - z^m|, \quad m \in \mathbb{N},$$

d. h. das Verfahren ist kontraktiv. Gilt überdies $|R(\Gamma)| < 1$, so folgt $\lim_{m \rightarrow \infty} y^m = 0$.

Aufgabe 2 (Theorie)

(6 Punkte)

Für die Funktion f gelte $|f(x)| \leq K$, $0 \leq x \leq 1$ für eine Konstante $K > 0$. Geben Sie eine nur von K und ϑ abhängige Schrittweitenbedingung bezüglich Δt und Δx an, unter der das ϑ -Verfahren für die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(x)u, & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 < x < 1, \\ u(0, t) &= \gamma_0, u(1, t) = \gamma_1, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

bezüglich der Maximumsnorm auf \mathbb{R}^{Ω_h} stabil ist.

Aufgabe 3 (Matlab)

(9 Punkte)

Lösen Sie die Aufgabe

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} - \lambda \frac{u}{1+u}, & 0 < x < 1, & 0 < t < T, \\u(x, 0) &= u_0(x) = 1, & 0 < x < 1, \\u(0, t) &= u(1, t) = \exp\left(\frac{t}{1+t^2}\right), & 0 \leq t \leq T\end{aligned}\tag{2}$$

in Matlab für $\lambda = 50$ und $T = 5$ mittels des Liniensystems mit dem impliziten Euler-Cauchy-, dem Crank-Nicholson- sowie einem steifen BDF-Verfahren für $\Delta x = 0.01$.

- (i) Implementieren Sie die ersten beiden Verfahren in MATLAB für $\Delta t = 0.01$. Verwenden Sie dabei zum Lösen der nichtlinearen Gleichungen das Newton-Verfahren, indem Sie dieses an der Lösung des vorigen Zeitlevels starten.
- (ii) Benutzen Sie für das BDF-Verfahren die MATLAB-Routine `ode15s`.
- (iii) Lösen Sie zum Schluss die Gleichung (2) mit dem BDF-Verfahren aus (ii) für $T = 1000$. Beobachten Sie die Konvergenz der Lösung gegen einen stationären Zustand für $t \rightarrow \infty$? Welche Gleichung erfüllt die Grenzfunktion?

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *Freya.Bachmann@uni-konstanz.de*.