Universität Konstanz *SS 2015*
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Schropp, F. Kleber, S. Trenz

Übungen zu **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html

Blatt 11

Abgabe: Dienstag, 07.07.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Gasdynamische Strömungen werden durch die Euler-Gleichungen beschrieben. In konservativen Variablen (ρ, u, E), welche für die Dichte, das Geschwindigkeitsfeld und die Energie eines Gases stehen, lauten die Euler-Gleichungen in einer Raumdimension

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(\rho u\big) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\big(\rho u\big) + \frac{\partial}{\partial x}\big(\rho u^2 + p\big) &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(u(E+p)\big) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

mit der Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1)\big(E - \frac{\rho}{2}u^2\big), \quad \gamma > 1.$$

Die Zustandsgleichung beschreibt die Abhängigkeit des Druckes p von den konservativen Variablen. Ferner gelte $p, \rho > 0$ und die Lösung von (1) sei glatt.

a) Zeigen Sie: Die Gleichung (1) hat in den sogenannten elementaren Variablen (ρ, u, p) die Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(\rho u\big) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

mit $a := \sqrt{\gamma p/\rho}$.

b) Schreiben Sie die Gleichung (2) in Erhaltungsform

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U)\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad U = (\rho, u, p),$$

und weisen Sie nach, dass das System (2) für $a > 0$ strikt hyperbolisch ist.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Sei durch $u^{j+1} = \vec{H}(u^j)$, $\big(\vec{H}(u^j)\big)_i = H(u_{i-1}^j, u_i^j, u_{i+1}^j)$, $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ ein konservatives und monotones Verfahren zur Lösung der skalaren Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \quad = \quad 0.$$

gegeben.

Zeigen Sie: Das Verfahren ist l^1-kontrahierend, d. h. es gilt

$$\|\vec{H}(u^j) - \vec{H}(v^j)\|_{l^1} \quad \leq \quad \|u^j - v^j\|_{l^1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Das Verfahren heißt monoton, falls gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}(u_{-1}, u_0, u_1) \geq 0, \; i = -1, 0, 1.$$

Aufgabe 3 (Matlab) (9 Punkte)

Der Verkehr auf einer einspurigen Straße ohne Abfahrts- und Überholmöglichkeiten kann durch eine nichtlineare Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(V(\rho)\rho\right) = 0 \tag{3}$$

modelliert werden. Hierbei ist $\rho(t,x)$ die Dichte der Autos (Anzahl der Autos pro Längeeinheit) und V ist die Geschwindigkeit eines Autos auf einem Bahnstück mit der Dichte ρ. In diesem Modell ist V gegeben durch

$$V(\rho) = 1 - \frac{\rho}{\rho_{max}},$$

wobei ρ_{max} die maximal mögliche Autodichte ist.

1. Implementieren Sie (analog zu Aufgabe 3, Blatt 10) das Lax-Friedrichs- und das nichtlineare Upwind-Verfahren

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} \quad &= \quad u_i^j - \frac{\lambda}{2}(f(u_{i+1}^j) - f(u_{i-1}^j)) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2}\Big(\,|a(u_i^j, u_{i+1}^j)| \cdot (u_{i+1}^j - u_i^j) - \,|a(u_{i-1}^j, u_i^j)| \cdot (u_i^j - u_{i-1}^j)\Big), \\ &\quad a(u,v) \,:=\, (f(u) - f(v))/(u - v), \;\; \lambda \,:=\, \Delta t/\Delta x \end{aligned}$$

   für die Gleichung (3).
   Als Anfangswerte nehmen Sie für $\rho_{max} = 10$

   (a) $\rho(0,x) = \begin{cases} \rho_{max}(x+1), & -1 < x \leq 0 \\ \rho_{max}(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

   (b) $\rho(0,x) = \begin{cases} \rho_{max}, & x \leq 0 \\ \frac{\rho_{max}}{2}, & x > 0 \end{cases}$

(c) $\rho(0,x) = \begin{cases} \frac{\rho_{max}}{2}, & x \leq 0 \\ \rho_{max}, & x > 0 \end{cases}$

2. Visualisieren Sie die Lösung $\rho(t,x)$ und die zugehörige Geschwindigkeit $V(\rho(t,x))$ zu verschiedenen Zeitpunkten. Interpretieren Sie die entsprechenden Verkehrssituationen!

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *Freya.Bachmann@uni-konstanz.de.*