Newton-Verfahren zur optimalen Steuerung nichtlinearer elliptischer Randwertaufgaben

Patrick Knapp

Berichtseminar zur Bachelorarbeit
Universität Konstanz

14.12.2010

Einleitung
Aufgabenstellung

- $\min J(y,u) := \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |y - y_d|^2 dx}_{=: J_1(y)} + \underbrace{\frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2}_{=: J_2(u)}$
- u.d.N:

$$\begin{aligned} -k(x)\Delta y(x) + a(x)y(x) + y^3(x) &= \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x) && \text{für } x \in \Omega \\ y(x) &= 0 && \text{für } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Einleitung
Aufgabenstellung

- $\min J(y,u) := \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |y - y_d|^2 dx}_{=:J_1(y)} + \underbrace{\frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2}_{=:J_2(u)}$
- u.d.N:

$$
\begin{aligned}
-k(x)\Delta y(x) + a(x)y(x) + y^3(x) &= \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x) && \text{für } x \in \Omega \\
y(x) &= 0 && \text{für } x \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

- Zustand $y : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$
- Steuerung $u = (u_1, \ldots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$

Einleitung
Aufgabenstellung

- $\min J(y,u) := \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega |y-y_d|^2 dx}_{=:J_1(y)} + \underbrace{\frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2}_{=:J_2(u)}$
- u.d.N:

$$\begin{aligned} -k(x)\Delta y(x) + a(x)y(x) + y^3(x) &= \sum_{i=1}^m u_i b_i(x) \quad &&\text{für } x \in \Omega \\ y(x) &= 0 &&\text{für } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

- Zustand $y : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$
- Steuerung $u = (u_1, \ldots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$
- $\Omega = (\omega_0, \omega_1)^2 \subset \mathbb{R}^2$
- $y_d : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ $\quad k : \Omega \to \mathbb{R}_+$ $\quad a : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- „control shapes“ $b_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad b_i = \chi_{\Omega_i}(x)$

Einleitung

Gliederung

- Diskretisierung des Problems
- Vorbereitungen zur Optimierung
- Optimierung und Numerischen Ergebnisse

Diskretisierung

der Differentialgleichung

Diskretisierung
der Differentialgleichung

- Diskretisierung mit Finite-Differenzen-Methode

Diskretisierung
der Differentialgleichung

- Diskretisierung mit Finite-Differenzen-Methode
- Gitter $\Omega_h = \{(\omega_0 + ih, \omega_0 + jh) | i, j \in \{0, \dots, l + 1\}\}$

Diskretisierung
der Differentialgleichung

- Diskretisierung mit Finite-Differenzen-Methode
- Gitter $\Omega_h = \{(\omega_0 + ih, \omega_0 + jh) | i, j \in \{0, \ldots, l+1\}\}$
- äussere Gitterpunkte $\Omega_h^A := \{x \in \Omega_h \cap \partial\Omega\}$

$$y(x) = 0$$

Diskretisierung
der Differentialgleichung

- Diskretisierung mit Finite-Differenzen-Methode
- Gitter $\Omega_h = \{(\omega_0 + ih, \omega_0 + jh) | i, j \in \{0, \ldots, l+1\}\}$
- äussere Gitterpunkte $\Omega_h^A := \{x \in \Omega_h \cap \partial\Omega\}$

$$y(x) = 0$$

- innere Gitterpunkte $\Omega_h^I := \{x \in \Omega_h \setminus \partial\Omega\}$

$$-k(x)\Delta y(x) + a(x)y(x) + y^3(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x)$$

Diskretisierung
der Differentialgleichung

- Diskretisierung mit Finite-Differenzen-Methode
- Gitter $\Omega_h = \{(\omega_0 + ih, \omega_0 + jh) | i, j \in \{0, \dots, l+1\}\}$
- äussere Gitterpunkte $\Omega_h^A := \{x \in \Omega_h \cap \partial\Omega\}$

$$y(x) = 0$$

- innere Gitterpunkte $\Omega_h^I := \{x \in \Omega_h \setminus \partial\Omega\}$

$$-k(x)\Delta y(x) + a(x)y(x) + y^3(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x)$$

- Gittervektor $x := (x_1, \dots, x_n)^T$

Diskretisierung

der Differentialgleichung

- Taylor-Formel für $f \in \mathcal{C}^4([s-h, s+h], \mathbb{R})$

$$f(s \pm h) = f(s) \pm hf'(s) + \frac{h^2}{2} f''(s) \pm \frac{h^3}{6} f^{(3)}(s) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$f''(s) = \frac{1}{h^2} [f(s-h) + f(s+h) - 2f(s)] + \mathcal{O}(h^2)$$

Diskretisierung
der Differentialgleichung

- Taylor-Formel für $f \in \mathcal{C}^4([s-h, s+h], \mathbb{R})$

$$f(s \pm h) = f(s) \pm hf'(s) + \frac{h^2}{2} f''(s) \pm \frac{h^3}{6} f^{(3)}(s) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$f''(s) = \frac{1}{h^2}\left[f(s-h) + f(s+h) - 2f(s)\right] + \mathcal{O}(h^2)$$

- $\Delta y(x) = \Delta y(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} y(x_1, x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} y(x_1, x_2)$

$$= \tfrac{1}{h^2}\left[y(x_1 - h, x_2) + y(x_1 + h, x_2) + y(x_1, x_2 - h)\right.$$
$$\left. + y(x_1, x_2 + h) - 4y(x_1, x_2)\right] + \mathcal{O}(h^2)$$

Diskretisierung
der Differentialgleichung

- Approximation der Differenzialgleichung

$$\sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x_j) = \underbrace{\left[\frac{4}{h^2}k_j + a_j\right] y_j - \frac{1}{h^2}k_j\left[y_j^{[2]} + y_j^{[0]} + y_j^{[3]} + y_j^{[1]}\right]}_{linear\ \ in\ \ y_j} + \underbrace{y_j^3}_{nichtlinear}$$

Diskretisierung
der Differentialgleichung

- Approximation der Differenzialgleichung

$$\sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x_j) = \underbrace{\left[\frac{4}{h^2} k_j + a_j\right] y_j - \frac{1}{h^2} k_j \left[y_j^{[2]} + y_j^{[0]} + y_j^{[3]} + y_j^{[1]}\right]}_{linear \;\; in \;\; y_j} + \underbrace{y_j^3}_{nichtlinear}$$

- Gleichungssystem $Bu = Ay + H(y)$

Diskretisierung
der Differentialgleichung

- Approximation der Differenzialgleichung

$$\sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x_j) = \underbrace{\left[\frac{4}{h^2}k_j + a_j\right] y_j - \frac{1}{h^2}k_j \left[y_j^{[2]} + y_j^{[0]} + y_j^{[3]} + y_j^{[1]}\right]}_{linear\ \ in\ \ y_j}$$

$$+ \underbrace{y_j^3}_{nichtlinear}$$

- Gleichungssystem $Bu = Ay + H(y)$
- nichtlineares Gleichungssystem, lösen mit Newton-Verfahren

Diskretisierung

des Zielfunktionals

- $J(y,u) = \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |y - y_d|^2 dx}_{J_1(y)} + \underbrace{\frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2}_{J_2(u)}$

Diskretisierung
des Zielfunktionals

- $J(y,u) = \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |y - y_d|^2 dx}_{J_1(y)} + \underbrace{\frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2}_{J_2(u)}$
- zusammengesetzten Trapezregel für $f \in \mathcal{C}^2([\omega_0,\omega_1],\mathbb{R})$

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega_1} f(x)dx = \frac{\omega_1 - \omega_0}{l+1}\left(\frac{1}{2}f(\omega_0) + \frac{1}{2}f(\omega_1) + \sum_{j=1}^{l} f(x_j)\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

Diskretisierung

des Zielfunktionals

- $J(y,u) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega |y - y_d|^2 dx}_{J_1(y)} + \underbrace{\frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2}_{J_2(u)}$
- zusammengesetzten Trapezregel für $f \in \mathcal{C}^2([\omega_0, \omega_1], \mathbb{R})$

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} f(x)dx = \frac{\omega_1 - \omega_0}{l+1}\left(\frac{1}{2}f(\omega_0) + \frac{1}{2}f(\omega_1) + \sum_{j=1}^{l} f(x_j)\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

- $J_1(y) = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{(\omega_1 - \omega_0)^2}{(l+1)^2}}_{=:\lambda}\left[r + \underbrace{(y - y_d)^T(y - y_d)}_{innere\ \ Gitterpunkte}\right] + \mathcal{O}(h^2)$

Diskretisierung
des Zielfunktionals

- $J(y,u) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx}_{J_1(y)} + \underbrace{\frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2}_{J_2(u)}$
- zusammengesetzten Trapezregel für $f \in \mathcal{C}^2([\omega_0, \omega_1], \mathbb{R})$

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} f(x)dx = \frac{\omega_1 - \omega_0}{l+1}\left(\frac{1}{2}f(\omega_0) + \frac{1}{2}f(\omega_1) + \sum_{j=1}^{l} f(x_j)\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

- $J_1(y) = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{(\omega_1 - \omega_0)^2}{(l+1)^2}}_{=:\lambda}\left[r + \underbrace{(y - y_d)^T(y - y_d)}_{innere\ \ Gitterpunkte}\right] + \mathcal{O}(h^2)$
- $J(y,u) = \frac{\lambda}{2}\left[r + (y - y_d)^T(y - y_d)\right] + \frac{\gamma}{2}u^T u$

Vorbereitungen zur Optimierung

Reduktion des Problems

- $e(y, u) := Ay + H(y) - Bu$

Vorbereitungen zur Optimierung

Reduktion des Problems

- $e(y, u) := Ay + H(y) - Bu$
- $u \mapsto y(u) \qquad \text{mit} \qquad e(y(u), u) = 0$

Vorbereitungen zur Optimierung

Reduktion des Problems

- $e(y, u) := Ay + H(y) - Bu$
- $u \mapsto y(u) \qquad \text{mit} \qquad e(y(u), u) = 0$
- definieren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu festem $u \in \mathbb{R}^m$

$$f(y) := \frac{1}{2} y^T \tilde{A} y + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j} y_j^4 - y^T \tilde{B} u$$

Vorbereitungen zur Optimierung

Reduktion des Problems

- $e(y,u) := Ay + H(y) - Bu$
- $u \mapsto y(u) \qquad \text{mit} \qquad e(y(u),u) = 0$
- definieren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu festem $u \in \mathbb{R}^m$

$$f(y) := \frac{1}{2} y^T \tilde{A} y + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j} y_j^4 - y^T \tilde{B} u$$

- $\nabla f(y) = \tilde{A}y + \tilde{H}(y) - \tilde{B}u = e(y,u)$
  im Minimum gilt $e(y,u) = \nabla f(y) = 0$

Vorbereitungen zur Optimierung

Reduktion des Problems

- $e(y,u) := Ay + H(y) - Bu$
- $u \mapsto y(u)$ mit $e(y(u),u) = 0$
- definieren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu festem $u \in \mathbb{R}^m$

$$f(y) := \frac{1}{2} y^T \tilde{A} y + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j} y_j^4 - y^T \tilde{B} u$$

- $\nabla f(y) = \tilde{A}y + \tilde{H}(y) - \tilde{B}u = e(y,u)$
  im Minimum gilt $e(y,u) = \nabla f(y) = 0$
- $\nabla^2 f(y) = \tilde{A} + \tilde{H}'(y)$ f ist gleichmäßig konvex

Vorbereitungen zur Optimierung

Reduktion des Problems

- $e(y, u) := Ay + H(y) - Bu$
- $u \mapsto y(u)$ mit $e(y(u), u) = 0$
- definieren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu festem $u \in \mathbb{R}^m$

$$f(y) := \frac{1}{2} y^T \tilde{A} y + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j} y_j^4 - y^T \tilde{B} u$$

- $\nabla f(y) = \tilde{A} y + \tilde{H}(y) - \tilde{B} u = e(y, u)$
  im Minimum gilt $e(y, u) = \nabla f(y) = 0$
- $\nabla^2 f(y) = \tilde{A} + \tilde{H}'(y)$ f ist gleichmäßig konvex
- $\min f(y)$ hat genau eine Lösung
  $\Rightarrow u \mapsto y(u)$ mit $e(y(u), u) = 0$ ist eindeutig

Vorbereitungen zur Optimierung

Reduktion des Problems

- $e(y,u) := Ay + H(y) - Bu$
- $u \mapsto y(u)$ mit $e(y(u),u) = 0$
- definieren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu festem $u \in \mathbb{R}^m$

$$f(y) := \frac{1}{2} y^T \tilde{A} y + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j} y_j^4 - y^T \tilde{B} u$$

- $\nabla f(y) = \tilde{A} y + \tilde{H}(y) - \tilde{B} u = e(y,u)$
  im Minimum gilt $e(y,u) = \nabla f(y) = 0$
- $\nabla^2 f(y) = \tilde{A} + \tilde{H}'(y)$ f ist gleichmäßig konvex
- $\min f(y)$ hat genau eine Lösung
  $\Rightarrow u \mapsto y(u)$ mit $e(y(u),u) = 0$ ist eindeutig
- reduziertes Problem $\min \hat{J}(u)$ mit

$$\hat{J}(u) := J(y(u),u) = \frac{\lambda}{2} \left[r + (y(u) - y_d)^T (y(u) - y_d) \right] + \frac{\gamma}{2} u^T u$$

Vorbereitungen zur Optimierung

Berechnung der Ableitungen

- Richtungsableitung

$$\hat{J}'(u)u_\delta = \langle \nabla_y J(y(u),u)\ ,\ y'(u)u_\delta \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \nabla_u J(y(u),u)\ ,\ u_\delta \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

Vorbereitungen zur Optimierung

Berechnung der Ableitungen

- Richtungsableitung

$$\hat{J}'(u)u_\delta = \langle \nabla_y J(y(u),u)\ ,\ y'(u)u_\delta \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \nabla_u J(y(u),u)\ ,\ u_\delta \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

- Ableiten der Nebenbedingung

$$e_y(y(u),u)y'(u)u_\delta + e_u(y(u),u)u_\delta = 0$$

Vorbereitungen zur Optimierung

Berechnung der Ableitungen

- Richtungsableitung

$$\hat{J}'(u)u_\delta = \langle \nabla_y J(y(u),u)\ ,\ y'(u)u_\delta \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \nabla_u J(y(u),u)\ ,\ u_\delta \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

- Ableiten der Nebenbedingung

$$e_y(y(u),u)y'(u)u_\delta + e_u(y(u),u)u_\delta = 0$$

- reduzierter Gradient

$$\nabla \hat{J}(u) = \nabla_u J(y(u),u) + e_u(y(u),u)^T p$$

- duale Gleichung

$$e_y(y(u),u)^T p = -\nabla_y J(y(u),u)$$

Vorbereitungen zur Optimierung
Berechnung der Ableitungen

- zweite Richtungsableitung
  $$\hat{J}''(u)(u_\delta, v_\delta) =$$
  $$\langle [Q^T \ (\nabla_{yy} J(y(u), u) + \sum_{i=1}^{n} [p]_i \nabla_{yy} [e(y(u), u)]_i) \ Q] u_\delta \ , \ v_\delta \rangle_{\mathbb{R}^m}$$
  $$+ \langle \nabla_{uu} J(y(u), u) u_\delta \ , \ v_\delta \rangle_{\mathbb{R}^m}$$
- $e_y(y(u), u) Q = -e_u(y(u), u)$

Vorbereitungen zur Optimierung

Berechnung der Ableitungen

- zweite Richtungsableitung
$$\hat{J}''(u)(u_\delta, v_\delta) =$$
$$\langle [Q^T \ (\nabla_{yy} J(y(u), u) + \sum_{i=1}^{n} [p]_i \nabla_{yy} [e(y(u), u)]_i) \ Q] u_\delta \ , \ v_\delta \rangle_{\mathbb{R}^m}$$
$$+ \langle \nabla_{uu} J(y(u), u) u_\delta \ , \ v_\delta \rangle_{\mathbb{R}^m}$$
- $e_y(y(u), u) Q = -e_u(y(u), u)$
- Lagrangefunktion $z := (y, u)$
$$L(z, p) := J(z) + p^T e(z)$$

Vorbereitungen zur Optimierung

Berechnung der Ableitungen

- zweite Richtungsableitung
  $\hat{J}''(u)(u_\delta, v_\delta) =$
  $\langle [Q^T \; (\nabla_{yy} J(y(u), u) + \sum_{i=1}^{n} [p]_i \nabla_{yy} [e(y(u), u)]_i) \; Q] u_\delta \;, \; v_\delta \rangle_{\mathbb{R}^m}$
  $+ \langle \nabla_{uu} J(y(u), u) u_\delta \;, \; v_\delta \rangle_{\mathbb{R}^m}$
- $e_y(y(u), u) Q = -e_u(y(u), u)$
- Lagrangefunktion $z := (y, u)$
  $L(z, p) := J(z) + p^T e(z)$
- $\nabla_{zz} L(z, p) = \left(\begin{array}{c|c} \nabla_{yy} J(z) + \sum_{i=1}^{n} [p]_i \nabla_{yy} [e(z)]_i & 0 \\ \hline 0 & \nabla_{uu} J(z) \end{array} \right)$

Vorbereitungen zur Optimierung

Berechnung der Ableitungen

- $T(y,u) := \begin{pmatrix} Q \\ \mathbb{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_y(y,u)^{-1} e_u(y,u) \\ \mathbb{I}_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times m}$
- $T(z)v_\delta \in \mathrm{Kern}(e'(z))$

Vorbereitungen zur Optimierung

Berechnung der Ableitungen

- $T(y,u) := \begin{pmatrix} Q \\ \mathbb{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_y(y,u)^{-1} e_u(y,u) \\ \mathbb{I}_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times m}$
- $T(z)v_\delta \in \mathrm{Kern}(e'(z))$
- $$\hat{J}''(u) = T(y(u),u)^T \; \nabla_{zz} L(y(u),u,p) \; T(y(u),u)$$

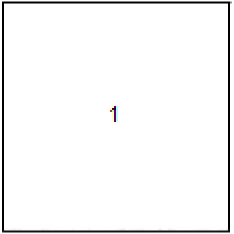
Vorbereitungen zur Optimierung

Berechnung der Ableitungen

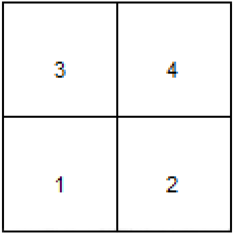
- $T(y,u) := \begin{pmatrix} Q \\ \mathbb{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_y(y,u)^{-1} e_u(y,u) \\ \mathbb{I}_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times m}$
- $T(z)v_\delta \in \mathrm{Kern}(e'(z))$
- $$\hat{J}''(u) = T(y(u),u)^T \; \nabla_{zz} L(y(u),u,p) \; T(y(u),u)$$
- $\nabla_{zz} L(z,p) = \left(\begin{array}{c|c} \nabla_{yy} J(z) + \eta \sum_{i=1}^{n} [p]_i \nabla_{yy} [e(z)]_i & 0 \\ \hline 0 & \nabla_{uu} J(z) \end{array}\right)$

Optimierung und Numerischen Ergebnisse

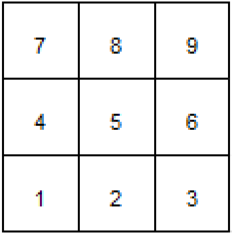
Optimierung und Numerischen Ergebnisse

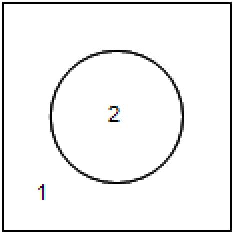


B_1

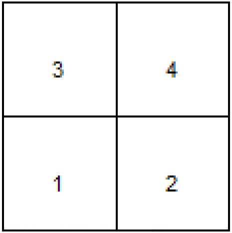


B_2

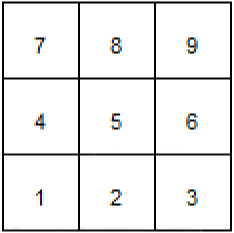




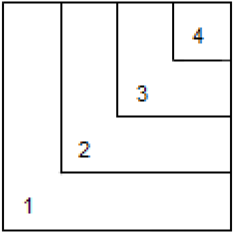
Optimierung und Numerischen Ergebnisse



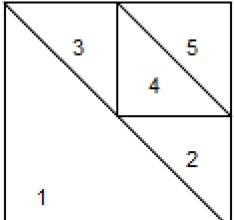
B_1

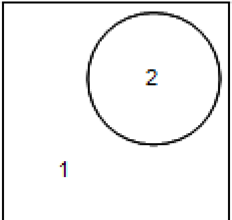


B_2



B_3





Optimierung und Numerischen Ergebnisse