Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2013

Ausgabe: 25.06.2013
Abgabe: 02.07.2013, 10:00 Uhr, Briefkästen F4

Mathematik für Physiker II
11. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 31** (Uneigentliche Integrale)

1. Überprüfen Sie, für welche $s \geq 0$ die folgenden uneigentlichen Integrale existieren:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x.$$

2. Seien der Integrand $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R})$ und die Transformation $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(x) = x^3$ für $x \leq 0$ und $\varphi(x) = x^2$ für $x \geq 0$. Zeigen Sie, dass für alle $a < 0 < b$ gilt

$$\mathrm{CH}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \neq \mathrm{CH}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Der Cauchysche Hauptwert ist also nicht verträglich mit der Substitutionsregel.

☐ **Aufgabe 32** (Vertauschen von Limes und Integral)

1. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = n\sin(nx)$, $x \in [0, \frac{\pi}{n}]$ und $f_n(x) = 0$ sonst gegen eine Grenzfunktion konvergiert, dass Integration und Grenzwertbildung aber nicht vertauschen, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{n}$ für $x \in [0, n]$ und $f_n(x) = 0$ sonst gleichmäßig konvergent ist, dass aber dennoch gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Ist die Folge $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2}\exp\left(-\dfrac{x}{n}\right)$ $(x > 0)$ gleichmäßig konvergent? Vertauschen Limes und Integral?

☐ **Aufgabe 33** (Differenziation parameterabhängiger Integrale)

Seien $f \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta] \times [a, b], \mathbb{R})$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta], [a, b])$. Zeigen Sie, dass das Parameterintegral

$$F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung von F.