Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2013

Ausgabe: 30.04.2013
Abgabe: 07.05.2013, 10:00 Uhr, Briefkästen F4

Mathematik für Physiker II
3. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 7** (partielle und totale Differenzierbarkeit)

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad\qquad f(0,0) = 0.$$

   Zeigen Sie:

   a) f ist längs aller Geraden durch $(0,0)$ stetig.

   b) Alle Richtungsableitungen von f im Punkt $(0,0)$ existieren.

   c) f ist nicht stetig und insbesondere nicht differenzierbar in $(0,0)$.

2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad\qquad f(0,0) = 0.$$

   in $(0,0)$ stetig und partiell differenzierbar ist, dass die Ableitung von f in $(0,0)$ aber dennoch nicht existiert.

3. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(f)$ der Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ 2z-x^3 \end{pmatrix}$$

   bzgl. der Basen $\mathcal{V} = ((1;0;-1),(1;1;1),(1;0;0))$ und $\mathcal{W} = ((0;1),(1;0))$.

☐ **Aufgabe 8** (Beweisaufgabe)

Seien $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = yg(x)$. Zeigen Sie, dass f genau dann in $(0,0)$ differenzierbar ist, wenn g in 0 stetig ist.

☐ **Aufgabe 9** (Ableitungseigenschaften)

1. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $AA^{\mathrm{T}} = \mathrm{Id}$. Seien $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = g(Ax)$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die folgende Gleichheit erfüllt ist:

$$\|\nabla f(x)\| = \|\nabla g(Ax)\|.$$

2. Sei $f : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $k \in \mathbb{N}$. Für alle $x \neq 0$ und alle $t > 0$ gelte $f(tx) = t^k f(x)$. Zeigen Sie, dass für alle $x \neq 0$ gilt:

$$\langle x, \nabla f(x)\rangle = kf(x).$$
