Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2013

Ausgabe: 07.05.2013
Abgabe: 14.05.2013, 10:00 Uhr, Briefkästen F4

Mathematik für Physiker II
4. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 10** (Zykloide)

Ein Rad mit Radius $R > 0$ rollt mit konstanter Geschwindigkeit $v > 0$ über die x-Achse. Auf dem Rad ist ein Punkt $P = (p_1, p_2)$ markiert (wobei der Abstand von P zur Radachse auch mehr als R betragen darf).

1. Habe die Radachse zum Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinaten $M(0) = (0, R)$ und habe $P(0)$ die Koordinaten $p_1(0) = 0$ und $p_2(0) = R + r$. Bestimmen Sie die Position $x = p_1(t)$ und $y = p_2(t)$ des Punktes zur Zeit t.

   Hinweis: Addieren Sie zum Positionsvektor $M(t)$ der Radachse den um den Winkel $\alpha(t)$ rotierenden Verbindungsvektor zwischen $M(t)$ und $P(t)$.

2. Bestimmen Sie die Zeiten t, zu denen die Momentangeschwindigkeit $\|\dot{P}(t)\|$ maximal bzw. minimal wird. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

3. Zeichnen Sie die Positionskurven von P_r für $R = 1$, $t \in [0, 6\pi]$ und $r \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ in ein gemeinsames Schaubild.

☐ **Aufgabe 11** (Parametrisierungen)

1. Skizzieren Sie (wenn's geht ohne vorherige Zuhilfenahme von Graphikprogrammen) die folgenden Objekte:

$$\gamma_1(\mathbb{R}) \quad \text{für} \quad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \Gamma_1([0,2\pi]\times[0,1]) \quad \text{für} \quad \Gamma_1(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ v \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\gamma_2(\mathbb{R}) \quad \text{für} \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \Gamma_2([0,2\pi]\times[0,\pi]) \quad \text{für} \quad \Gamma_2(u,v) = \begin{pmatrix} \sin(u)\cos(v) \\ \sin(u)\sin(v) \\ \cos(u) \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

2. a) Finden Sie eine Parametrisierung $f : [0,2\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ des Torus ("Doughnuts") mit "Durchmesser" R und "Dicke" r.

   Hinweis: Definieren Sie zunächst einen Kreis in der xy-Ebene vom Radius R und lassen Sie anschließend um diesen einen Kreis mit Radius r rotieren.

   b) Sei $P = f(u,v)$ ein Punkt auf dem Torus. Parametrisieren Sie die Tangentialebene an den Torus in P.

   c) Seien $x \in [0,2\pi]^2$ und $\xi \in \mathbb{R}^2$. Beschreiben Sie die Kurve $\gamma(t) = f(x + t\xi)$. Wie wirken sich große bzw. kleine Komponenten von ξ aus?

☐ **Aufgabe 12** (Vektoranalysis)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f \in \mathcal{C}^2(G,\mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie:

1. Der Laplace-Operator ist invariant unter orthogonaler Transformation, d.h. $\Delta(f\circ A)(x) = (\Delta f)(Ax)$ für alle $x \in G$.

2. Rotationsfelder sind divergenzfrei, d.h. $\operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0$. Benötigen Sie die Voraussetzung, dass die zweite Ableitung von v stetig ist?

3. Für $f : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$, $g(x) = -\frac{1}{\|x\|}$ gelten $f = \nabla g$, $\Delta g = \operatorname{div} f = 0$ und $\operatorname{rot} f = \operatorname{rot}\nabla g = 0$.