Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2013

Ausgabe: 14.05.2013
Abgabe: 21.05.2013, 10:00 Uhr, Briefkästen F4

Mathematik für Physiker II
5. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 13** (Taylor-Polynome)

1. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1 \cos x_2 \exp x_3$$
am Entwicklungspunkt $(0, 0, 0)$.
2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x_i| \leq 10^{-2}$, $i = 1, 2, 3$, gilt $|f(x) - T_2(x)| \leq 10^{-5}$.

☐ **Aufgabe 14** (Matrixnormen)

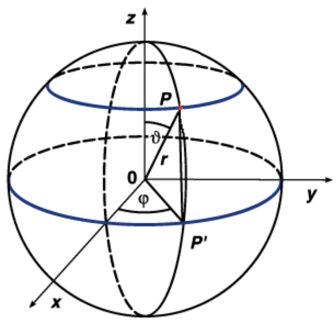
Die Frobenius-Norm $\|\cdot\|_\mathrm{F}$ ist definiert für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch
$$\|A\|_\mathrm{F} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Zeigen Sie:

1. $\|\cdot\|_\mathrm{F}$ ist eine Norm, d.h. für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten ...
   a) ... positive Definitheit: $\|A\|_\mathrm{F} \geq 0$ und $\|A\|_\mathrm{F} = 0 \Rightarrow A = 0$,
   b) ... Verträglichkeit mit Skalarmultiplikation: $\|\alpha A\|_\mathrm{F} = |\alpha|\, \|A\|_\mathrm{F}$,
   c) ... Dreiecksungleichung: $\|A + B\|_\mathrm{F} \leq \|A\|_\mathrm{F} + \|B\|_\mathrm{F}$.
2. $\|\cdot\|_\mathrm{F}$ ist submultiplikativ, d.h. $\|AB\|_\mathrm{F} \leq \|A\|_\mathrm{F}\|B\|_\mathrm{F}$.
3. $\|\cdot\|_\mathrm{F}$ ist verträglich bzgl. der euklidischen Norm, d.h. $\|Av\| \leq \|A\|_\mathrm{F}\|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung: $\|\cdot\|_\mathrm{F}$ läßt sich auch für $(m \times n)$-Matrizen definieren.

☐ **Aufgabe 15** (Kugelkoordinaten und lokale Umkehrbarkeit)

Betrachten Sie die Transformationsabbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$(x, y, z) = \Phi(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$



Quelle: http://www.amustud.de

1. Leiten Sie anhand der Skizze den Übergang von sphärischen zu kartesischen Koordinaten her.

   Bemerkung: Führen Sie geeignete rechtwinklige Dreiecke ein und drücken Sie mittels trigonometrischer Funktionen Kanten über Winkel aus.
2. Zeigen Sie:
   a) Φ ist in jedem Punkt (x, y, z) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar.
   b) Φ ist in keinem Punkt auf der z-Achse lokal umkehrbar.
   c) Von $D = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$ nach $\mathbb{R}^3 \backslash \{(x, y, z) \mid x = 0 \;\&\; y = 0\}$ ist Φ bijektiv. Leiten Sie dazu die Darstellung der Umkehrfunktion durch Auflösen nach r, ϑ, φ her.
3. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion.