Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2013

Ausgabe: 04.06.2013
Abgabe: 11.06.2013, 10:00 Uhr, Briefkästen F4

Mathematik für Physiker II
8. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 22** (Determinantenberechnung)

1. Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Seien $x = (-1, 2, 0)$ und $y = (0, 0, 5)$. Bestimmen Sie alle Vektoren $z \in \mathbb{R}^3$, für die gilt

$$x \perp z, \qquad y \perp z, \qquad |\det(x, y, z)| = \frac{25}{2}.$$

3. Finden Sie alle Vektoren in Richtung $w = (0, 2, 1)$, die mit den Vektoren $u = (1, 2, 0)$ und $v = (-2, -1, 1)$ ein Parallelepiped vom Volumen 3 aufspannen.

☐ **Aufgabe 23** (Rechenregeln für Determinanten)

Beweisen Sie nur mit Hilfe der Entwicklungsformeln für Determinanten und der Multiplikativität

$$\det(AB) = \det(A)\,\det(B)$$

die folgenden Rechenregeln:

1. $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$.
2. $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.
3. $A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$. Dabei bedeutet $A \sim B$, dass eine invertierbare Matrix C existiert mit $A = CBC^{-1}$.
4. Sei A eine obere Dreiecksmatrix, d.h. es gelte $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$. Dann gilt $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.
5. Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\,\det(B).$$

☐ **Aufgabe 24** (Kreuzprodukt)

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass $(a, b, a \times b)$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, d.h. dass $\det(a, b, a \times b) > 0$ gilt (womit speziell die lineare Unabhängigkeit von $\{a, b, a \times b\}$ gezeigt ist).
2. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ normiert und orthogonal zueinander. Zeigen Sie, dass $\{a, b, a \times b\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.