Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2013

Ausgabe: 09.07.2013
Abgabe: Die Bearbeitung des Übungsblatts ist freiwillig.

Mathematik für Physiker II
Lösungen zum 13. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 37** (Satz von Fubini)

1. Berechnen Sie über dem Dreieck Δ mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ das Integral von $f(x,y) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
2. Berechnen Sie – falls möglich – für die Funktion $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ die Integrale

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

3. Zeigen Sie, dass für die Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{1}{y^2}\ (0 < x < y \leq 1), \qquad f(x,y) = -\frac{1}{x^2}\ (0 < y < x \leq 1), \qquad 0 \text{ sonst}$$

die Integrationsreihenfolge nicht vertauscht:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \neq \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Lösung.

1. Der Integrand lässt sich in $(0,0)$ durch den Wert 1 stetig fortsetzen. Die Voraussetzungen zum iterativen Integrienren (Satz von Fubini) sind somit erfülllt und wir erhalten

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_0^1\int\limits_0^x \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sin(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \cos(1).$$

2. Aus Symmetriegründen liefern beide rekursiven Integrale den gleichen Wert, nämlich Null:

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{+R} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial}{\partial y}\frac{-x}{2(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y = \lim_{R\to\infty} \frac{-x}{2(x^2+y^2)}\Bigg|_{-R}^{+R} = 0.$$

f ist allerdings nicht über $\mathbb{R}$ integrierbar; andernfalls würde die Integration von f über $(1,\infty)^2$ einen endlichen Wert liefern. Es ist aber

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{(1,R)^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \lim_{R\to\infty}\int\limits_1^R\int\limits_1^R \frac{xy}{(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{R\to\infty}\int\limits_1^R \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{x}{2(x^2+R^2)}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+R^2}\Bigg|_1^R = \infty.$$

3. f ist in $[0,1]^2$ nicht integrierbar, ein Übereinstimmen der Integralwerte bei Vertauschung des Integrationsreihenfolge ist also nicht zu erwarten. In der Tat gelten

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^y \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^1\int_y^1 -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{y^2}\Big|_0^y \,\mathrm{d}y + \int_0^1 \frac{1}{x}\Big|_y^1 \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y + \int_0^1 1 - \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = 1$$

und

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^x -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^1\int_x^1 \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 -\frac{y}{x^2}\Big|_0^x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 -\frac{1}{y}\Big|_x^1 \,\mathrm{d}y = \int_0^1 -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x} - 1\,\mathrm{d}x = -1.$$

☐ **Aufgabe 38** (Volumen- und Oberflächenintegrale)

1. Seien $h > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Wendelfläche mit Ganghöhe h und Umdrehungszahl n:
$$\Phi(t,\varphi) = (t\cos\varphi,\ t\sin\varphi,\ h\varphi) \qquad 0 \le t \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi n.$$

2. Berechnen Sie mittels Transformationssatz das Volumen und die Oberfläche einer Kugel mit Radius R und eines Torus mit Radien R, r.

Lösung.

1. Die partiellen Ableitungen der Parametrisierung sind gegeben durch
$$\Phi_t = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \Phi_\varphi = (-t\sin\varphi, t\cos\varphi, h) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{gram}(\nabla\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} = t^2$$
und wir erhalten das zu erwartende Ergebnis, dass der Flächeninhalt der Wendelfläche dem n-fachen Flächeninhalt des Kreises mit Radius R entspricht:
$$\mathcal{O} = \int_{\square} \sqrt{\mathrm{gram}(\nabla\Phi)}(r,\varphi)\,\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_0^R\int_0^{2\pi n} t\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}t = 2\pi n\frac{R^2}{2} = n\pi R^2.$$

2. Mit den Parametrisierungen $K : (0,R)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi)$ (Kugel) und $T : (0,r)\times(0,2\pi)\times(0,2\pi)$ (Torus),
$$K(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad T(\rho,u,v) = R\begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix} \cos u\cos v \\ \cos u\sin v \\ \sin u \end{pmatrix},$$
erhalten wir die Jacobi-Matrizen
$$\nabla K(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$
$$\nabla T(\rho,u,v) = \begin{pmatrix} \cos u\cos v & -\rho\sin u\cos v & -R\sin v - \rho\cos u\sin v \\ \cos u\sin v & -\rho\sin u\sin v & R\cos v + \rho\cos u\cos v \\ \sin u & \rho\cos u & 0 \end{pmatrix}$$
und daraus
$$\det(\nabla K)(r,\theta,\phi) = r^2\sin\theta, \qquad \mathrm{gram}(\nabla K)(\theta,\phi) = R^4\sin^2\theta,$$
$$\det(\nabla T)(\rho,u,v) = -\rho R - \rho^2\cos u, \qquad \mathrm{gram}(\nabla T)(u,v) = r^2(R + r\cos u)^2.$$

Es ergeben sich die bekannten Formeln

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(K) &= \int_{K\square} \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\square} |\det \nabla K|\,\mathrm{d}(r,\theta,\varphi) = \int_0^R\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^R\int_0^\pi r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^R -r^2\cos\theta\Big|_0^\pi\,\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi R^3,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{O}(K) = \int_{\square} \sqrt{\operatorname{gram}\nabla K}\,\mathrm{d}(\theta,\phi) = \int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R^2\int_{-\pi}^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -2\pi R^2\cos\theta\Big|_{-\pi}^\pi = 4\pi R^2,$$

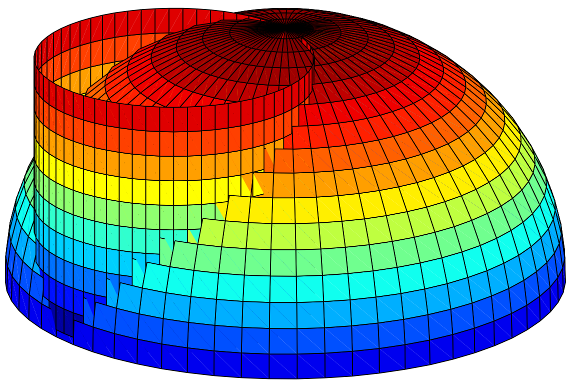
$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(T) &= \int_{T\square} |\det\nabla T|\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho R + \rho^2\cos u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^r\int_0^{2\pi}\rho R + \rho^2\cos u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi\int_0^r \rho R u + \rho^2\sin u\Big|_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\rho = 4\pi^2 R\int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho = 2\pi^2 R r^2,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{O}(T) = \int_{\square}\sqrt{\operatorname{gram}\nabla T}\,\mathrm{d}(u,v) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos u)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 2\pi\int_0^{2\pi} rR + r^2\cos u\,\mathrm{d}u = 4\pi^2 rR.$$

□ **Aufgabe 39** (Schnittkörper)

Das Vivianische Fenster entsteht durch den Schnitt eines Zylinders Z mit einer Kugel K,

$$Z = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(x-\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \le \left(\frac{R}{2}\right)^2\right\},$$
$$K = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \le R^2\right\}.$$



1. Berechnen Sie die Zylinderoberfläche innerhalb der Kugel und die Kugeloberfläche innerhalb des Zylinders.
2. Bestimmen Sie das Volumen des Schnittkörpers.

Lösung.

Mit der kartesischen Parametrisierung der oberen Kugelschale

$$\Phi(x,y) = (x,y,z(x,y)), \qquad z(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

erhalten wir

$$\nabla\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z_x & z_y \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{gram}\nabla\Phi(x,y) = \begin{vmatrix} 1+z_x^2 & z_x z_y \\ z_x z_y & 1+z_y^2 \end{vmatrix} = 1 + z_x^2 + z_y^2.$$

Berechnung der partiellen Ableitungen z_x, z_y ergibt

$$\nabla z(x,y) = \frac{(-x,-y)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{\operatorname{gram}\nabla\Phi}(x,y) = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Die Zylindergrundfläche $Z_G = \{(x,y) \mid (x-\frac{R}{2})^2 + y^2 \le (\frac{R}{2})^2\}$ lässt sich in Polarkoordinaten schreiben als $Z_G = \{(r,\varphi) \mid -\pi\le\varphi\le\pi \;\&\; 0\le r\le R\}$, denn für gegebenen Winkel φ folgt aus dem Satz von Thales, dass $\cos\varphi = \frac{r}{R}$.

Damit besitzt der Kugelanteil im Zylinder den Flächeninhalt

$$\mathcal{O}(V_K) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\varphi} \frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{R^2-r^2}\Big|_0^{R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{1-\cos^2\varphi}+\sqrt{R^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= -2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin\varphi|+1\,\mathrm{d}\varphi = 2R^2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi+\pi\right) = 2R^2(\pi-2).$$

Die Mantelfläche des Zylinders ist symmetrisch bzgl. der xy-Ebene $y=0$. Im Sektor $y \geq 0$ lässt sie sich parametrisieren durch

$$\Phi(x,y(x,z),z), \qquad y(x,z) = \left(x,z,+\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2-\left(x-\frac{R}{2}\right)^2}\right. = \sqrt{Rx-x^2}.$$

Die Gramsche Determinante berechnet sich als

$$y_x = \frac{R-2x}{2\sqrt{Rx-x^2}}, \quad y_z = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{gram}(\nabla\Phi) = 1+y_x^2+y_z^2 = \frac{R^2}{4(Rx-x^2)}.$$

Das Integrationsgebiet für den Mantelanteil innerhalb der Kugel, d.h. die Kugelgrundfläche, über welche integriert wird, ist gegeben als die Menge $K_G = \{(x,z) \mid 0 \leq x \leq R \;\&\; -\sqrt{R^2-Rx} \leq z \leq \sqrt{R^2-Rx}\}$:

$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2 = 0 \quad \& \quad x^2+y^2+z^2 = R^2 \qquad \Longrightarrow \qquad z^2 = R^2-Rx.$$

Wir erhalten:

$$\mathcal{O}(V_Z) = 2\int_0^R\int_{-\sqrt{R^2-Rx}}^{+\sqrt{R^2-Rx}} \frac{R}{2\sqrt{Rx-x^2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 2R\int_0^R\sqrt{\frac{R^2-Rx}{Rx-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2R\sqrt{R}\int_0^R\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4R^2.$$

Insbesondere ist die Gesamtoberfläche des in der Kugel eingeschlossenen Zylinderanteils gerade halb so groß wie die Kugeloberfläche.

Für das Volumen ergibt sich schließlich:

$$\mathcal{V} = 2\int_{Z_G} z(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\varphi} r\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\sqrt{R^2-r^2}^{\,3}\Big|_0^{R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{2}{3}R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{1-\cos^2\varphi}^{\,3}+1\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -|\sin\varphi|^3+1\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)$$

$$= \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$