Universität Konstanz
Fakultät für Mathematik und Statistik
S. Banholzer, D. Beermann, Prof. Dr. S. Volkwein

Wintersemester 2017/2018

Übungen zu
POD für linear-quadratische Optimalsteuerung

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/beermann/teaching

Blatt 1

Abgabe: Dienstag, 14. November in der Vorlesung

Aufgabe 1.1 (Programmierteil) (10 Punkte)

Gegeben sei das Ortsintervall $\Omega \subset \mathbb{R}$ und das Zeitintervall $\Theta \subset \mathbb{R}$. Nach Diskretisierung dieser Intervalle in n_x, bzw. n_t Punkte verstehen wir eine Funktion $y : \Omega \times \Theta \to \mathbb{R}$ als Matrix $Y = [y^1, ..., y^{n_t}] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_t}$. Betrachte das POD-Problem

$$\min_{\psi_1,...,\psi_\ell \in \mathbb{R}^{n_x}} \quad \sum_{k=1}^{n_t} \alpha_k \left\| y^k - \sum_{i=1}^{\ell} \langle y^k, \psi_i \rangle_W \psi_i \right\|_W^2 \quad \text{s.t. } \langle \psi_i, \psi_j \rangle_W = \delta_{ij} \tag{1}$$

wobei die Skalare α_k von der Trapezregel bei der Zeitintegration stammen und die Matrix $W = \text{diag}\,(w_1, ..., w_{nx})$ der Ortsintegration mittels Trapezregel entspricht.

1. Schreiben Sie eine Methode, welche zu einer gegebenen Matrix Y und vorgegebener Länge ℓ der POD-Basis die Vektoren $\psi_1, ..., \psi_\ell$ in einer Matrix $\Psi \in \mathbb{R}^{n_x \times \ell}$ zurückgibt. Das Programm sollte die Option bieten, jede der beiden Berechnungsstrategien aus dem Skript auszuwählen, d.h. das Eigenwertproblem $\hat{Y}\hat{Y}^T \psi_i = \bar{\lambda}_i \psi_i$ sowie die Methode der Snapshots $\hat{Y}^T \hat{Y} \phi_i = \bar{\lambda}_i \phi_i$.[1]

2. Testen Sie Ihr Programm mit den Funktionen

   a) $y_1(t, x) = \cos(x)\cos(t)$, $\Omega = (0, 2\pi)$, $\Theta = (0, 2\pi)$
   b) $y_2(t, x) = \cos(x + t)$, $\Omega = (0, 2\pi)$, $\Theta = (0, 2\pi)$
   c) $y_3(t, x) = \cos(tx)$, $\Omega = (0, 2\pi)$, $\Theta = (0, 1)$

   Dokumentieren Sie insbesondere in einem Bericht:

   a) Testen Sie das Verhalten der beiden Berechnungsstrategien für variierende Werte von n_x und n_t anhand von y_3.
   b) Betrachten Sie grafische Veranschaulichungen von y und der POD-Approximation von y für y_1, y_2 und y_3 für $\ell = 1, 2, 5, 10$. Hierzu können Sie Filme oder surface plots verwenden. Begründen Sie Ihre Beobachtungen mathematisch im Fall y_1, $\ell = 1$ und y_2, $\ell = 2$.

Aufgabe 1.2 (Theorie) (10 Punkte)

Bringen Sie Problem (1) auf die Standardform

$$\min_{\psi \in \mathbb{R}^N} \quad f(\psi) \quad \text{u.d.N.} \quad e(\psi) = 0 \tag{2}$$

wo $N := \ell n_x$, $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ und $e : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ gilt mit $p = \frac{1}{2}\ell(\ell + 1)$.

1. Zeigen Sie, dass alle $\psi = [\psi_1, ..., \psi_\ell] \in \mathbb{R}^N$ mit $e(\psi) = 0$ reguläre Punkte von (2) sind, d.h. dass $e'(\psi)$ dann surjektiv ist.

2. Stellen Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ von (2) auf. Identifizieren Sie alle kritischen Punkte von $\mathcal{L}$, d.h. alle $\psi \in \mathbb{R}^N$, für die ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}^p$ existiert mit $e(\psi) = 0$ und $\nabla_\psi \mathcal{L}(\psi, \lambda) = 0$.

[1] Aus Gründen der numerischen Stabilität kann es beiweilen sinnvoll sein, nach Berechnung der Basis noch eine Gram-Schmidt-Orthonormalisierung durchzuführen.