Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Stefan Volkwein
Patrick Kurth

01.02.2010

Analysis III

12. Übungsblatt

5. Übung zur Maß- und Integrationstheorie

1. *(Konvergenzsätze 1)*

Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1.$$

Hinweis: Wenden Sie einen der Konvergenzsätze aus der Vorlesung an. Können Sie dazu die Integrationsgrenzen unabhängig von n machen?

2. *(Konvergenzsätze 2)*

Betrachten Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_n| d\lambda < \infty$, wobei λ wie gewohnt das Lebesgue-Maß bezeichne. Zeigen Sie:
$F(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ existiert fast überall und es gilt $F \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} F d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n d\lambda.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Folge $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ und zeigen Sie mit einem Satz aus der Vorlesung, dass $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ fast überall konvergiert. Um die letzte Eigenschaft zu zeigen arbeiten Sie mit der Funktionenfolge $g_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$ $(N \in \mathbb{N})$ und verwenden Sie darauf den Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz. Lassen Sie sich von der Aufgabenstellung nicht abschrecken.

Abgabe bis Montag 8. Februar **12.00 Uhr** in die Briefkästen auf F4.