Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Stefan Volkwein
Patrick Kurth

09.11.2009

Analysis III

3. Übungsblatt

1. *(eine kleine Anwendung)*

Eine Epidemie breite sich unter einer Bevölkerung mit $n \geq 2$ Individuen aus, und zwar derart, dass Infizierte weder sterben, noch gesund werden. Sei $u(t)$ die Anzahl der Nichtinfizierten und $v(t)$ die Anzahl der Infizierten zum Zeitpunkt t. Wir setzen u hinreichend glatt voraus. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gebe es genau einen Infizierten und die Anzahl der Nichtinfizierten verringere sich gemäß

$$u'(t) = -cu(t)v(t)$$

mit $c > 0$. Zu welchem Zeitpunkt sind 90% der Bevölkerung infiziert?

2. *(exakte Differentialgleichungen)*

Seien $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f, g \in C(G, \mathbb{R})$. Wir betrachten folgende Differentialgeichung

$$f(t, y(t)) + g(t, y(t))y'(t) = 0.$$

Falls diese Gleichung nicht exakt ist, kann man versuchen, einen sogenannten *integrierenden Faktor* $M \in C(G, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ zu finden, so dass die Differentialgleichung

$$M(t, y(t))f(t, y(t)) + M(t, y(t))g(t, y(t))y'(t) = 0$$

exakt ist.
Im Allgemeinen muss für die Bestimmung von M eine partielle Differentialgleichung (d.h. Ableitungen nach verschiedenen Argumenten treten in der Gleichung auf) gelöst werden, was sich i.d.R. als schwierig oder unmöglich erweist.
Um dieses Problem zu umgehen kann man den Ansatz versuchen, dass M nur von einem Argument abhängt, d.h. $M = M(t)$ oder $M = M(y)$.

Untersuchen Sie folgende Differentialgleichungen auf Exaktheit und lösen Sie die AWPs (wenn möglich explizit, sonst implizit). Falls die Gleichung nicht exakt ist, versuchen Sie einen integrierenden Faktor zu finden.

a) $3t^2 + 4ty(t) + (2t^2 + 2y(t))\, y'(t) = 0, \quad y(0) = 1.$

b) $ty(t)^2 + y(t) - ty'(t) = 0, \quad y(1) = 1.$

3. *(Potenzreihenansatz)*

Betrachten Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Differentialgleichung

$$(1 - t^2)y''(t) - 2ty'(t) + \lambda(\lambda + 1)y(t) = 0.$$

a) Leiten Sie über den Potenzreihenansatz $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ eine Rekursionsformel für die c_k her und untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz.

b) Zu welchen λ existieren polynomiale Lösungen?

Abgabe bis Montag 16.November **12.00 Uhr** in die Briefkästen auf F4.