Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Stefan Volkwein
Patrick Kurth

16.11.2009

Analysis III

4. Übungsblatt

1. *(Hilfreiches zu linearen DGls)*

Zeigen Sie

a) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so konvergiert die Reihe

$$exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

bezüglich der Operatornorm.
Hinweis: Die Operatornorm einer Matrix A auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist definiert als $\|A\|_{Op} := \sup_{|x|=1} |Ax|$.

b) Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, mit $AB = BA$, so gilt $exp(A + B) = exp(A)exp(B)$.
Hinweis: Sie dürfen von der Gültigkeit der Cauchy-Produktformel für Matrix-wertige Reihen ausgehen.

c) Für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $exp(A)$ invertierbar, mit $exp(A)^{-1} = exp(-A)$.

d) Für eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Diagonaleinrägen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist $exp(D)$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $exp(\lambda_1), \dots, exp(\lambda_n)$.

e) Für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und alle $T \in Gl(n, \mathbb{C})$ (allgemeine lineare Gruppe) gilt $exp(TAT^{-1}) = Texp(A)T^{-1}$.

f) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, die in Jordanscher Normalform transformierbar ist, so lässt sich $exp(A)$ „einfach” berechnen. Wie sieht es mit $exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$ aus?

2. *(lineare DGls)*

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \quad t \mapsto exp(tA)$$

differenzierbar ist.
Hinweis: Arbeiten Sie mit einer möglichst allgemeinen Definition von Differenzierbarkeit, die Sie in der A1-Vorlesung kennengelernt haben.

b) Zeigen Sie, dass durch $Y(t) := exp(tA)$ $(t \in \mathbb{R})$ die eindeutige Lösung der (Matrizen-)Differentialgleichung $Y'(t) = AY(t)$, $Y(0) = I_n$ gegeben ist.
Wie sehen die Lösungen der linearen Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$, $t \in \mathbb{R}$ aus?
Hinweis: Um die Lösungen der zweiten DGl darzustellen, untersuchen Sie die Spalten von $Y(t)$ auf lineare Unabhängigkeit.

c) Lösen Sie mit den Erkenntnissen obiger Aufgaben folgendes AWP

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} u(t), \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. *(ein bisschen Lineare Algebra)*

Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Konstruieren Sie eine Matrix $S \in Gl(n, \mathbb{C})$ derart, dass $J := S^{-1}AS$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen DGl $y' = Ay$.

Abgabe bis Montag 23.November **12.00 Uhr** in die Briefkästen auf F4.