Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Stefan Volkwein
Patrick Kurth

30.11.2009

Analysis III

6. Übungsblatt

1. *(Stabilität)*

Betrachten Sie folgende „gedämpfte" Schwingungsgleichung

$$u''(t) + 2\delta u'(t) + \omega_0^2 u(t) = 0,$$

mit Abklingkonstante $\delta > 0$ und Eigenfrequenz $\omega_0 > 0$ und folgende „ungedämpfte" Schwingungsgleichung

$$u''(t) + \omega_0^2 u(t) = 0,$$

mit Eigenfrequenz $\omega_0 > 0$.
Die Energie zu einer Lösung u einer der beiden Gleichungen sei definiert durch

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(u'(t)\right)^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\left(u(t)\right)^2$$

(Summe aus kinetischer und potentieller Energie).

a) Zeigen Sie, ohne die Lösungen der Gleichungen zu berechnen, dass die Energien zu Lösungen der gedämpften Schwingungsgleichung monoton fallen (abklingen) und die Energien zu Lösungen der ungedämpften Gleichung konstant sind.

b) Zeigen Sie mit Hilfe eines Ljapunov-Funktionals, dass die stationäre Lösung $y_0 \equiv 0$ der gedämpften Schwingungsgleichung stabil ist.
Ist die triviale Lösung der ungedämpften Gleichung auch stabil?
Hinweis: Transformieren Sie zuerst die Gleichungen auf Systeme erster Ordnung und betrachten Sie bei der Konstruktion des Ljapunov-Funktionals den Energieterm.

c) Betrachten Sie nun die nichtlineare DGl

$$y'(t) = sin(y(t))$$

vom ersten und zweiten Übungsblatt. Zeigen Sie mit Hilfe eines Ljapunov-Funktionals, dass die staionäre Lösung $y \equiv \pi$ stabil ist.
Zeigen Sie mit Hilfe der Lösungsdarstellung, dass die stationäre Lösung $y \equiv 0$ nicht stabil ist.

2. *(inhomogene Gleichungen)*

Berechnen Sie die allgemeine Lösung folgender inhomogener Schwingungsgleichung

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = e^{-t}.$$

Hinweis: Beschränken Sie sich beim Aufschrieb auf die wesentlichen Schritte. Das Invertieren einer Matrix z.B. müssen Sie nicht schriftlich ausführen.

3. *(Randwertaufgaben)*

Betrachten Sie folgendes *Dirichletsches Randwertproblem*

$$-u''(t) = r(t), \quad u(a) = u(b) = 0,$$

mit $a < b$ und $r \in C([a,b], \mathbb{R})$.

a) Schreiben Sie das RWP in die Form

$$y'(t) = F(t)y(t) + g(t), \quad Ay(a) + By(b) = c,$$

für geeignete $F \in C([a,b], \mathbb{R}^{n\times n})$, $g \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $c \in \mathbb{R}^n$.

b) Untersuchen Sie das RWP auf Lösbarkeit.

4. *(Greensche Matrix)*

Betrachten Sie für $a < b$, $F \in C([a,b], \mathbb{C}^{n\times n})$, $g \in C([a,b], \mathbb{C}^n)$ und $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ das RWP

$$y'(t) = F(t)y(t) + g(t), \quad Ay(a) + By(b) = 0.$$

Seien $Y \in C^1([a,b], \mathbb{C}^{n\times n})$ eine Fundamentalmatrix und $C_Y := AY(a) + BY(b)$ invertierbar.

Zeigen Sie:
Es gibt höchstens eine Abbildung $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}^{n\times n}$ mit den folgenden Eigenschaften

i) G ist auf $[a,b]^2 \setminus \{(t,t) : t \in [a,b]\}$ stetig.

ii) Es gilt $G(t+0,t) - G(t-0,t) = I_n$, $a < t < b$.

iii) Für jedes feste $s \in [a,b]$ löst $G(\cdot,s)$ die homogene Matrix-DGl
$\partial_t G(t,s) = F(t)G(t,s)$, $t \in [a,b] \setminus \{s\}$.

iv) Für jedes feste $s \in (a,b)$ erfüllt $G(\cdot,s)$ die homogenen Randbedingungen
$AG(a,s) + BG(b,s) = 0$.

Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe zwei Funktionen G und $\tilde{G}$ mit den obigen Eigenschaften und betrachten Sie die Differenz $H = G - \tilde{G}$. Benutzen Sie Ihr Wissen zur eindeutigen Lösbarkeit von homogenen RWPs.

Abgabe bis Montag 7. Dezember **12.00 Uhr** in die Briefkästen auf F4.