

Analysis III

7. Übungsblatt



Weihnachts-Edition Beachtet die Informationen auf der letzten Seite

1. (Eigenwertprobleme)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen folgender linearer Abbildungen

- a) $A : \begin{cases} D(A) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}) \\ f \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \end{cases}, a < b$
 $D(A) = \{f \in C^2([a, b], \mathbb{R}) : f(a) = f(b) = 0\},$
- b) $A : \begin{cases} D(A) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}) \\ f \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \end{cases}, a < b$
 $D(A) = \{f \in C^2([a, b], \mathbb{R}) : \frac{\partial}{\partial x} f(a) = \frac{\partial}{\partial x} f(b) = 0\},$
- c) $A : \begin{cases} D(A) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}) \\ f \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \end{cases}, a < b$
 $D(A) = \{f \in C^2([a, b], \mathbb{R}) : f(a) = \frac{\partial}{\partial x} f(b) = 0\}.$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $a = 0$.

Was unterscheidet das Ergebnis in b) von den anderen beiden? Können Sie sich diesen Unterschied anschaulich erklären?

2. (Greensche Funktion)

Bestimmen Sie zum Randwertproblem

$$xu''(x) + u'(x) = x^2, \quad x \in [1, 2], \quad u'(1) = 0, u(2) = 0$$

die Greensche Funktion und lösen Sie damit das Problem.

3. (*Sturm-Liouvillsche Randwertaufgabe*)

Seien $a < b$ und $r \in C([a, b], \mathbb{R})$. Betrachten Sie ein *gewichtetes Sturm-Liouvillsches Eigenwertproblem*

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) + \lambda r(x)u(x) = 0, \quad x \in [a, b], \quad R_1u = R_2u = 0$$

zu Randoperatoren R_1, R_2 .

- a) Zeigen Sie, dass es Randoperatoren derart gibt, dass für Eigenfunktionen u und v zu verschiedenen Eigenwerten

$$\int_a^b r(x)u(x)v(x)dx = 0$$

gilt.

- b) Sei $\lambda = 1$ ein Eigenwert des Problems und sei u eine zugehörige Eigenfunktion. Zeigen Sie: Sind $R_1w = w(a)$, $R_2w = w(b)$ und ist $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ derart, dass das Problem

$$-(p(x)v'(x))' + q(x)v(x) + r(x)v(x) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad R_1v = R_2v = 0$$

lösbar ist, so gilt

$$\int_a^b u(x)f(x)dx = 0.$$

Abgabe bis Montag 14. Dezember **12.00 Uhr** in die Briefkästen auf F4.

Sind Mathematiker kreativ?

Gestaltet das untere Bild (Ausmalen, Basteln...). Erlaubt ist alles, was kreativ ist. Abgabe ist Mittwoch, der 16. Dezember in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4. Die besten Ideen werden von der Jury (Sylvia und Martin) prämiert.



Wie es in Konstanz zur Weihnachtszeit Tradition ist, möchten wir alle Studenten dazu einladen, sich mit ihren Übungsleitern auf einen (oder mehrere) Glühwein auf dem Weihnachtsmarkt zu treffen. Treffpunkt ist der 10. Dezember, 18 Uhr, am Konstanzer Glühweintreff im Hafen. Wer die Glühwein zahlt, könnt ihr in den Übungen verhandeln;-)