

Analysis III

8. Übungsblatt

1. Übung zur Maß- und Integrationstheorie

1. (Integralsatz von Gauß)

- a) Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne $|M|_n$ den n -dimensionalen Inhalt von M (vgl. Definitionen aus A2).

Zeigen Sie unter Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes, dass für $B(0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ ($r > 0$) gilt

$$|B(0, r)|_n = \frac{r}{n} |\partial B(0, r)|_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Berechnen Sie damit den Inhalt der Oberfläche einer Kugel in \mathbb{R}^3 mit Radius $r > 0$.

Hinweis: Berechnen Sie die Integrale mit Methoden aus den A1/2-Vorlesungen.

- b) Betrachten Sie einen Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Grundfläche

$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} < r \right\}$$

und Spitze in $(0, 0, h)^t \in \mathbb{R}^3$ für $r, h > 0$.

Sei $K_S = \{(x, y, z)^t \in K : 0 < z < \frac{h}{2}\}$ ein Kegelstumpf.

Sei

$$F(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld in \mathbb{R}^3 .

Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes folgendes Integral

$$\int_{K_S} \operatorname{div} F.$$

2. (σ -Algebra und andere Mengensysteme)

- a) Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
Zeigen Sie, dass

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{ \mathcal{A} \supseteq \mathcal{E} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } X \}$$

die bezüglich Inklusion kleinste σ -Algebra ist, die \mathcal{E} enthält.

Hinweis: Zeigen Sie auch, dass $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra ist.

- b) Sei X eine Menge. Zeigen Sie:

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Dynkin-System, wenn gilt:

- i) $X \in \mathcal{A}$,
- ii) für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ gilt $B \setminus A \in \mathcal{A}$,
- iii) für $A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

- c) Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem. Sei $A \in \mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{D}_A := \{ B \in \mathcal{P}(X) : A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \}$$

ein Dynkin-System ist, wobei $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ das bezüglich Inklusion kleinste Dynkin-System bezeichne, das \mathcal{E} enthält.

3. (Maß)

- a) Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum, mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass folgende Abbildung ein Maß auf (X, \mathcal{A}) definiert

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

- b) Sei $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{ A \subseteq X : A \text{ oder } A^c \text{ endlich} \}$ und

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ endlich.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{A} keine σ -Algebra ist und μ nicht σ -additiv auf \mathcal{A} ist.

- c) Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und

$$\zeta(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass ζ ein Maß auf (X, \mathcal{A}) ist, welches genau dann σ -endlich ist, falls X abzählbar ist.

Abgabe bis Montag 21. Dezember **12.00 Uhr** in die Briefkästen auf F4.