Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Tim Seger

27. April 2009

Optimierung
1. Übungsblatt

Alle Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungen am Dienstag, 12. Mai 2009, vorzubereiten. Die mit ✏ gekenntzeichneten Aufgaben sind auch schriftlich auszuarbeiten und am Donnerstag, 07. Mai 2009, in der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 1.1 Berechnen Sie $\nabla f(x)$ und $\nabla^2 f(x)$ für die Rosenbrock-Funktion

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad \text{für } x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass $x^* = (1, 1)^T$ die einzige lokale Minimalstelle von f und dass $\nabla^2 f(x^*)$ positiv definit ist.

Aufgabe 1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = 8x_1 + 12x_2 + x_1^2 - 2x_2^2 \quad \text{für } x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

nur einen stationären Punkt besitzt, der weder eine Minimal- noch eine Maximalstelle, sondern ein Sattelpunkt ist. Skizzieren Sie die Niveaulinien von f[1].

Aufgabe 1.3 a) Seien $\gamma \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von

$$f(x) = \frac{1}{2}\, x^T Q x + b^T x + \gamma \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

b) Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g(x) \neq 0$ $(x \in X)$. Sei $q : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $q(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$. Bestimmen Sie die stationären Punkte von q.

c) Seien $Q \in S_n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix und der *Rayleigh-Quotient* $q : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$q(x) := \frac{x^T Q x}{\|x\|^2}.$$

Zeigen Sie, dass die stationären Punkte $x^* \neq 0$ gerade die Eigenvektoren von Q zum Eigenwert $\lambda = q(x^*)$ sind.

Aufgabe 1.4 ✏ Beweisen Sie Satz 2.1 aus der Vorlesung:
Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist x^* eine lokale Minimalstelle von f (auf X), so gilt $\nabla f(x^*) = 0$, d.h., x^* ist ein stationärer Punkt.

---
[1] Hierzu dürfen Sie gerne auch Matlab, Maple, Mathematica etc. verwenden.

Aufgabe 1.5 ✏ Seien $\gamma \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $Q \in S_n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ (S_n Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen) gegeben. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei die quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\, x^T Q x + b^T x + \gamma \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

a) f ist genau dann konvex, wenn Q positiv semidefinit ist.

b) f ist genau dann gleichmäßig konvex, wenn Q positiv definit ist.

c) f ist genau dann strikt konvex, wenn f gleichmäßig konvex ist.
Hinweis: Zeigen und verwenden Sie die Ungleichung

$$f(x) - f(y) > \nabla f(y)^T (y - x) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Kriterien zum Erwerb eines Übungsscheins

✓ Auf jedem Übungblatt werden 2 oder 3 Aufgaben gestellt, die „nur“ zum Vortrag in der Übungsstunde vorzubereiten sind. Von diesen Aufgaben sollen insgesamt 2/3 bearbeitet sein; zur Kontrolle der Bearbeitung wird in jeder Übung eine Liste durchgegeben. Jede/r Teinehmer/in soll einmal im Semester eine Aufgabe an der Tafel vorrechnen.

✓ Die mit ✏ gekenntzeichneten Aufgaben werden korrigiert; für jede dieser Aufgaben gibt es 5 Punkte.

✓ Auf 3 oder 4 Übungsblättern wird es eine Programmieraufgabe geben, die **in Zweiergruppen** mit Matlab bearbeitet werden soll. Die Abgabe der m-files erfolgt per Email an Tim.Seger@uni-konstanz.de. Als Anreiz zum Bearbeiten der Programmieraufgaben gibt es 10 Punkte pro Aufgabe.

✓ 50% der Gesamtpunktzahl aus den schriftlichen Aufgaben und den Programmieraufgaben sollen erreicht werden. Ferner soll entweder eine der schriftlichen Aufgaben vorgerechnet oder ein Matlab-Programm in der Übung erklärt werden.