Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Tim Seger

11. Juni 2009

Optimierung
4. Übungsblatt

Alle Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungen am Dienstag, 23. Juni 2009, vorzubereiten. Die mit ✏ gekenntzeichneten Aufgaben sind auch schriftlich auszuarbeiten und am Donnerstag, 18. Juni 2009 bis 10 Uhr in Briefkasten Nr. 16 abzugeben.

Aufgabe 4.1 ✏ Wir betrachten eine viermal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nur approximativ ausgewertet werden kann, d.h.

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + \widetilde{\varepsilon}_f(x) \quad \text{mit } |\widetilde{\varepsilon}_f(x)| \leq \varepsilon_f.$$

Bestimmen Sie die Ableitung von f numerisch durch zentrale Differenzen und zeigen Sie, dass fr den Fehler ε_H, der durch die Approximation der zweiten Ableitung mit dieser Methode zustande kommt, gilt:

$$\varepsilon_H = \mathcal{O}(\varepsilon_f^{4/9}).$$

Aufgabe 4.2 Verifizieren Sie die Formel

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{f(x + \varepsilon e_i + \varepsilon e_j) - f(x + \varepsilon e_i) - f(x + \varepsilon e_j) + f(x)}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon)$$

für die Approximation der Hessematrix durch Funktionswerte von f. Hier bezeichnet $e_i \in \mathbb{R}^n$ den i-ten kanonischen Einheitsvektor.

Aufgabe 4.3 ✏ Der Winkel η_k zwischen der Suchrichtung d^k und der Richtung $-\nabla f(x^k)$ des steilsten Abstiegs ist definiert durch

$$\cos \eta_k = \frac{-\nabla f(x^k) d^k}{\|\nabla f(x^k)\|_2 \|d^k\|_2}. \tag{1}$$

Wir betrachten nun das Verfahren

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k \quad \text{mit} \quad d^k = -B_k \nabla f(x^k),$$

wobei $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiv-definiter Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist mit gleichmäßig beschränkter Konditionszahl, das heißt,

$$\mathrm{cond}_2(B_k) = \|B_k\|_2 \|B_k^{-1}\|_2 \leq M \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass $\cos \eta_k \geq 1/M$ für alle k.[1]

[1] Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass $\|Bx\|_2 \geq \|x\|/\|B_k^{-1}\|_2$ gilt für jede reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann verwenden Sie (1).

Aufgabe 4.4 ✏ Wir betrachten die quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^TQx + bx$$

mit positiv definiter Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und mit $b \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}\big\{f(x^k + \alpha d^k) \,\big|\, \alpha \in \mathbb{R}\big\}$$

gegeben ist durch

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{(d^k)^T Q d^k}.$$

b) Seien $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ein Startwert des Gradientenverfahrens zur Minimierung von f und x^* die eindeutig bestimmte strikte Minimalstelle, so dass $x^0 - x^*$ parallel zu einem Eigenvektor von Q ist. dann konvergiert das Gradientenverfahren nach einer Iteration.

Aufgabe 4.5 [2]

Gegeben sei eine Zielfunktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, welche die zu Beginn von Kapitel 5 der Vorlesung geforderten Voraussetzungen erfüllt.

Erstellen Sie einen Algorithmus, der mit dem Newton-Verfahren eine kritische Stelle von f bestimmt. Fr die Schrittweitenwahl benutzen Sie die Armijo-Regel. Achten Sie bei Ihrer Formulierung auf die Art der Schleifen, sinnvolle Abbruchkriterien und insgesamt auf die Implementierbarkeit Ihres Algorithmus.

Schreiben Sie den Algorithmus in einer ähnlichen Struktur auf, wie die bisherigen in der Vorlesung gezeigten Algorithmen.

[2] Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist als Vorbereitung für die Programmieraufgabe auf dem 5. Übungsblatt besonders zu empfehlen.