Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Tim Seger

09. Juli 2009

Optimierung
6. Übungsblatt

Alle Aufgaben sind zum Vortragen in den übungen am Dienstag, 21. Juli 2009, vorzubereiten. Die mit ✏ gekenntzeichneten Aufgaben sind auch schriftlich auszuarbeiten und am Donnerstag, 16. Juli 2009, in den Briefkasten Nr. 16 abzugeben.

Aufgabe 6.1 ✏ (Sherman-Morrison-Woodbury-Formel).

a) Gegeben seien die Matrizen $U, V \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ seien invertierbar. Zeigen Sie, dass die Matrix $M := A + USV^T$ genau dann invertierbar ist, wenn $W := S^{-1} + V^T A^{-1} U$ invertierbar ist, und dass im Fall der Existenz von M^{-1} die folgende Formel gilt:
$$M^{-1} = A^{-1} - A^{-1}UW^{-1}V^T A^{-1}.$$

b) Übertragen Sie nun a) auf den Fall einer Rang-1-Modifikation $M := A + uv^T$ mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$, um zu zeigen: M ist invertierbar genau dann, wenn $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ gilt, und in diesem Fall ist
$$M^{-1} = \left(I - \frac{A^{-1}uv^T}{1 + v^T A^{-1} u} \right) A^{-1}.$$

c) Verwenden Sie die Formel aus Teil b) um die zur symmetrischen Rang 1-Formel zugehörige inverse Aufdatierungsformel
$$H_+^{-1} = B_+ = B_k + \frac{(s_k - B_k y_k)(s_k - B_k y_k)^T}{(s_k - B_k y_k)^T y_k}$$
herzuleiten. Hierbei sei H_k symmetrisch und invertierbar mit Inverser B_k und den Notationen aus der Vorlesung.

Aufgabe 6.2 ✏

Seien — mit den Bezeichnungen der Vorlesung — $H_a \in S_n$ positiv definit, $y_a^T s_a > 0$ und H_+ das BFGS - Update von H_a. Zeigen Sie, dass dann auch H_+ symmetrisch und positiv definit ist.[1]

[1] Hinweis: Wurzelziehen.

Aufgabe 6.3 Wir betrachten das Problem, die Punkte auf der Parabel $y = \frac{1}{5}(x-1)^2$ zu finden, die vom Punkt $(x, y) = (1, 2)$ den geringsten Abstand (in der Euklidischen Norm) haben.

a) Formulieren Sie das Problem als Optimierungsproblem mit quadratischer Zielfunktion und einer Gleichungsrestriktion.

b) Welche Punkte (x, y) sind regulär?

c) Finden Sie alle stationären Punkte (x^*, y^*) und die dazugehörigen Lagrange-Multiplikatoren λ^*, die

$$\nabla J(x^*, y^*) + \lambda^* \nabla e(x^*, y^*) = 0 \quad \text{und} \quad e(x^*, y^*) = 0$$

erfüllen. Welche stationären Punkte des Lagrangefunktionals sind optimale Lösungen des Problems?

d) Was erhalten Sie, wenn Sie die Nebenbedingung $e(x, y) = 0$ direkt in das Zielfunktional einbauen, indem Sie die Variable x eliminieren?

Aufgabe 6.4 **Programmieraufgabe** (in Zweiergruppen zu bearbeiten)

Implementieren Sie das Quasi-Newton Verfahren mit der BFGS-Update-Formel, indem Sie eine neue Funktion

```
function X = quasinewton(f, grad_f, x0, epsilon, t0, alpha, beta, rho, gamma)
```

erstellen. Hier sind `f` bzw. `gradf` die Zielfunktion bzw. ihr Gradient, `x0` den Startpunkt, `t0` die Anfangsschrittweite und `epsilon` die Schranke für das Abbruchkriterium. Die Größen `alpha, beta, rho` und `gamma` werden für die Schrittweitenwahl nach Wolfe-Powell bzw. nach Armijo benötigt. Zurückgegeben werden soll eine Matrix `X`, die den gesamten Iterationsverlauf enthält.

Mit den Bezeichnungen der Vorlesung nehmen Sie die Schrittweitenwahl nach Wolfe-Powell, falls $y_a^T s_a >$ `eps` gilt [2] und ansonsten die Schrittweitenwahl nach Armijo. Eine „Musterfunktion" `wolfepowell.m` kann von der Vorlesungshomepage heruntergeladen werden.

Setzen Sie für die Parameter die folgenden Werte ein: `t0` $= 1$, `alpha` $= 10^{-2}$, `beta`$= 0.5$, `gamma`$= 2$ und `rho`$= 0.9$. Testen Sie ihre Funktion an den folgenden Beispielen:

a) An der Himmelblau-Funktion (Blatt 5) mit `epsilon=` 10^{-2} und den Startwerten `x0 = [-0.27;-0.91]`, `x0 = [-0.271;-0.91]`, `x0 = [-0.25;-1]`.

b) An der Rosenbrock-Funktion mit `epsilon=` 10^{-3} und den beiden Startwerten `x0 = [1.2;1.2]` bzw. `x0 = [-1.2;1]`.

c) Zum Vergleich der verschiedenen Algorithmen, die in den Übungen programmiert wurden, wenden Sie Ihre Verfahren nochmals für die Rosenbrock-Funktion mit `epsilon=` 10^{-3} und dem Startwert `x0 = [-1.2;1]` an und erstellen Sie eine tabellarische Übersicht der Verfahren, in der Sie typische Größen, wie z.B. die Anzahl der benötigten Iterationen, miteinander vergleichen.

[2] `eps` ist in Matlab vorgegeben