Optimale Steuerung: Parameterschätzung an einem Anfangswertproblem aus der Physiologie

Theorie

Gegeben sei das Zielfunktional

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(y_1(t_i)-\hat{y_i})^2 + \sum_{i=1}^{4}\beta_i(u_i-\hat{u_i})^2\right) \tag{1}$$

unter der Nebenbedingung

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A(u)y(t) + g(t,u) \quad t \in [0,t_f] \\ y(0) &= y^0 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei wird für Gleichung (1) mit $\hat{u} = (0.8, 5, -0.8, 5)^T$ der Bereich für physiologisch sinnvolle Werte festgelegt und $\hat{y_1}$ sind Messwerte für $y_1(t)$. Für Gleichung (3) benutzen wir die folgenden Definitionen:

$$A(u) = \begin{pmatrix} -\frac{u_4}{u_1} & \frac{u_4}{u_1} \\ \frac{u_4}{u_2} & \frac{-u_4-u_3}{u_2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$g(t,u) = \frac{1}{u_1}\begin{pmatrix} q_{inf}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Da (1) eindeutig lösbar ist, definieren wir:

$$\hat{J}(y(u),u) := J(y,u).$$

Wir lösen das Problem mit Hilfe eines 'Lagrage-Ansatzes'. Dazu formulieren wie die Nebenbedingung wie folgt um:

$$E(y,u) = \begin{pmatrix} \dot{y} - f(\cdot, y(\cdot), u) \\ y(0) - y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \in L^2 \\ 0 \in \mathbb{R}^2 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}(y,u,p,p^0) = J(y,u) + \int_0^{t_f} \big(\dot{y}(t) - f(t,y(t),u(t))\big)^T p(t)\,dt + y(0)p^0 \tag{5}$$

Wie in (2.26a) aus der Vorlesung folgt:

$$0 = D_y\mathcal{L}(y^*,u^*,p,p^0)\cdot h = D_yJ(y^*,u^*)\cdot h(t) + < D_yE\cdot h(t), \begin{pmatrix} p \\ p^0 \end{pmatrix} > \quad \forall h \in H^1 \tag{6}$$

$$= D_yJ(y^*,u^*)\cdot h(t) + \int_0^{t_f} (\dot{h}(t) - A(u^*)\cdot h(t))^T p(t)\,dt + h(0)^T p^0 \tag{7}$$

$$= D_yJ(y^*,u^*)\cdot h(t) + h(t_f)^T p(t_f) - h(0)^T p(0) + \int_0^{t_f} (-\dot{p}(t) - A(u^*)^T\cdot p(t))^T h(t)\,dt + h(0)^T p^0 \tag{8}$$

Dies gilt insbesondere für $h \in H_0^1$.

$$\Longrightarrow \int\limits_0^{t_f} (-\dot{p}(t) - A(u^*)^T \cdot p(t))^T h(t)\, dt = -D_y J(y^*, u^*) \cdot h(t) \quad \forall h \in H_0^1 \tag{9}$$

$$= -\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_1(t_i) - \hat{y}_i \\ 0 \end{pmatrix}^T h(t) \quad \forall h \in H_0^1 \tag{10}$$

$$= -\int\limits_0^{t_f} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m (y_1(t_i) - \hat{y}_i)\delta_{t_i} \\ 0 \end{pmatrix}^T h(t)\, dt \quad \forall h \in H_0^1 \tag{11}$$

Daraus gewinnen wir die Differentialgleichung für die adjungierte Variable:

$$-\dot{p}(t) - A(u)^T p(t) = -\sum_{i=1}^{m-1} \big(y_1(t_i) - \hat{y}_i\big)\delta_{t_i} \quad t \in [0, t_f). \tag{12}$$

$$h(0) = 0 \Rightarrow p(t_f) = -\begin{pmatrix} y_1(t_f) - \hat{y}_m \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$h(t_f) = 0 \Rightarrow p(0) = p^0 \tag{14}$$

Wie in (2.26b) aus der Vorlesung folgt:

$$0 = D_u \mathcal{L}(y^*, u^*, p, p^0) \cdot v = D_u J(y^*, u^*) \cdot v + < D_u E \cdot v, \begin{pmatrix} p \\ p^0 \end{pmatrix} > \quad \forall v \in \mathbb{L}^2 \tag{15}$$

$$= \nabla \hat{J}_p(p) \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{L}^2 \tag{16}$$

$$\Longrightarrow \Big(\nabla \hat{J}_p(p)\Big)_i = \beta_i(u_i^* - \hat{u}_i) - \int\limits_0^{t_f} \big(y^T(t) A_{u_i}^T(u) + g_{u_i}^T(t, u)\big) p(t)\, dt = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{17}$$

Numerik

Die oben hergeleiteten Bedingungen können wir ausnutzen, um das Problem numerisch zu lösen. Dazu verwenden wir den folgen Algorithmus. Dazu sei ein Startwert u^0 gegeben (n=0).

while $n \leq n_{max}$ & $\|\hat{J}_u(u^n)\| > \varepsilon_1$ & $\|\hat{J}(u^n) - \hat{J}(u^{n-1})\| > \varepsilon_2$ **do**

1. Berechnen $y(\cdot, u^n)$ mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta Verfahrens $(O(h^4))$ gemäß (3).
2. Berechnen $p(\cdot)$ mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta Rückwärtsverfahrens $(O(h^4))$ gemäß (12).
3. Berechnen $\hat{J}_u(u^n)$ mit Hilfe der Simpson-Regel $(O(h^4))$ gemäß (17).
4. Ermitteln die Schrittweite t^n mit Hilfe der Armijo-Regel.
5. Setzen $u^{n+1} = u^n + t^n \frac{\hat{J}_u(u^n)}{\|\hat{J}_u(u^n)\|}$.

Setzen $n := n + 1$.

end while