Optimale Steuerung

Eugenia Fidas

Universitat Konstanz

13.Juli 2010

Inhalt

1. Zustandsgleichung

Seien $t_f \geq t_\circ > 0$, $r > 0$ und $L > 0$. Wir betrachten das dynamische System

$$\dot{x}(t) = \frac{r}{2}\big(u_1(t) + u_2(t)\big)\begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) \\ \sin(\psi(t)) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in (t_\circ, t_f], \tag{1a}$$

$$\dot{\psi}(t) = \frac{r}{2L}\big(u_1(t) - u_2(t)\big) \quad \text{für } t \in (t_\circ, t_f] \tag{1b}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(t_\circ) = x_\circ \quad \text{und} \quad \psi(t_\circ) = \psi_\circ, \tag{1c}$$

wobei $x_\circ = (x_{1\circ}, x_{2\circ})^T \in \mathbb{R}^2$ gilt.

1. Zustandsgleichung

Seien $y = (x, \psi)^T : [t_\circ, t_f] \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $y_\circ = (x_\circ, \psi_\circ)^T$ und

$$f(y, u) = \begin{pmatrix} \frac{r}{2}\,(u_1 + u_2)\cos\psi \\ \frac{r}{2}\,(u_1 + u_2)\sin\psi \\ \frac{r}{2L}\,(u_1 - u_2) \end{pmatrix}$$

für $y = (x_1, x_2, \psi) \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Zustandsgleichung

Kompakte Form:

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \text{ für } t \in (t_\circ, t_f] \quad \text{und} \quad y(t_\circ) = y_\circ \tag{2}$$

autonomes Anfangswertproblem für eine gegebene Steuerung $u : [t_\circ, t_f] \to \mathbb{R}^2$

1. Zustandsgleichung

f ist stetig partiell differentierbar.
Jacobimatrix von f :

$$f'(y,u) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y,u) \middle| \frac{\partial f}{\partial u}(y,u) \right)$$
$$= \frac{r}{2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & -(u_1+u_2)\sin\psi & \cos\psi & \cos\psi \\ 0 & 0 & (u_1+u_2)\cos\psi & \sin\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{array} \right)$$

für $y = (x,\psi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ und $u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Zustandsgleichung

Lösbarkeit?
Picard-Lindelöf?
Globale Stetigkeit?

1. Zustandsgleichung

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt für $y_1 = (x_1, \psi_1)$, $y_2 = (x_2, \psi_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ und für Zwischenstellen ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\|f(y_1, u) - f(y_2, u)\|_2^2 &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{r}{2}(u_1 + u_2)(\cos\psi_1 - \cos\psi_2) \\ \frac{r}{2}(u_1 + u_2)(\sin\psi_1 - \sin\psi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} -\frac{r}{2}(u_1 + u_2)\sin\xi_1(\psi_1 - \psi_2) \\ \frac{r}{2}(u_1 + u_2)\cos\xi_2(\psi_1 - \psi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\
&= \frac{r^2}{4} |u_1 + u_2|^2 \left(|\cos^2\xi_1| + |\sin^2\xi_2| \right) |\psi_1 - \psi_2|^2 \\
&\leq \frac{r^2}{2} |u_1 + u_2|^2 \, |\psi_1 - \psi_2|^2
\end{aligned}
$$

1. Zustandsgleichung

Also

$$\|f(y_1, u) - f(y_2, u)\|_2 \le L\,\|y_1 - y_2\|_2$$

mit $L = r\,|u_1 + u_2|/\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ f global Lipschitz-stetig

Satz von Picard-Lindelöf $\Rightarrow$ (2) hat für jedes stetige u genau eine Lösung $y \in C^1([t_\circ, t_f]; \mathbb{R}^3)$

1. Zustandsgleichung

Bemerkung:

Für $u \in L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$ gibt es genau eine schwache Lösung $y \in H^1(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^3)$ von (2), die $y(t_\circ) = y_\circ$ und die Variationsgleichung

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \big(\dot{y}(t) - f(y(t), u(t))\big)^T p(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{3}$$

für alle $p \in L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^3)$ erfüllt.

1. Zustandsgleichung

Ein nichtlinearer Lösungsoperator

$\mathcal{S} : L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^3) \to H^1(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^3)$

mit $y = \mathcal{S}u$ ist eindeutige Lösung der Variationsgleichung (3)

mit $y(t_\circ) = y_\circ$ für die Steuerung $u \in L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$.

2. Das Optimalsteuerproblem

Gegeben:

vorgegebene Trajektorie $x_d \in L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$

vorgegebener nominaler Winkel $\psi_d \in L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R})$

nominale Steuerung $u_d \in L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$

Gewichtungsparameter $\alpha \geq 0$

Regularisierungsparameter $\beta, \gamma \geq 0$ mit $\beta + \gamma > 0$

2. Das Optimalsteuerproblem

Wir betrachten das Zielfunktional

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_{t_\circ}^{t_f} \|x(t)-x_d(t)\|_2^2 + \alpha\,|\psi(t)-\psi_d(t)|^2 +$$

$$+\beta\,\|u(t)-u_d(t)\|_2^2 + \gamma\,\|\dot{u}(t)\|_2^2\,\mathrm{d}t$$

für $y \in Y := H^1(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^3)$ und $u \in U$ mit

$$U = \begin{cases} L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2) & \text{wenn } \gamma = 0 \text{ gilt,} \\ H^1(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2) & \text{wenn } \gamma > 0 \text{ gilt.} \end{cases}$$

2. Das Optimalsteuerproblem

Definiere Hilbertraum $Z = Y \times U$ mit der üblichen Produkttopologie.

Das nichtlineare (unendlich-dimensionale) Optimerungsproblem lautet

$$\min J(z) \quad \text{u.d.N.} \quad z = (y, u) \in Z \text{ und} \qquad \textbf{(P)}$$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t)), \; t \in (t_\circ, t_f], \\ y(t_\circ) = y_\circ. \end{cases}$$

Da das Anfangswertproblem (2) für eine gegebene Steuerung eindeutig lösbar ist, können wir mit $y(u) = \mathcal{S}(u)$ die zur Steuerung u eindeutig definierte Lösung von (2) bezeichnen.

2. Das Optimalsteuerproblem

reduziertes Zielfunktional: $\hat{J} : U \to \mathbb{R}$

$$\hat{J}(u) = J(y(u), u) \quad \text{für } u \in U.$$

reduziertes Problem

$$\min \hat{J}(u) \quad \text{u.d.N.} \quad u \in U. \tag{$\hat{\mathbf{P}}$}$$

2. Das Optimalsteuerproblem

Ist u^* eine (lokale) optimale Lösung von ($\hat{\mathbf{P}}$), so löst offenbar $(y(u^*), u^*)$ das Problem ($\mathbf{P}$).

Ist umgekehrt $(y(u^*), u^*)$ eine optimale Lösung von ($\mathbf{P}$), so löst u^* das reduzierte Problem ($\hat{\mathbf{P}}$).

Wir bezeichnen eine Lösung u^* von ($\hat{\mathbf{P}}$) als **optimale Steuerung** und die dazugehörige Lösung $y(u^*)$ des Anfangswertproblems (2) den zu u^* gehörende **optimale Zustand**.

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Zunächst führen wir die Lagrangefunktion $\mathcal{L} : Z \times Y \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein:

$$\mathcal{L}(z, p, p_\circ) = J(z) + \langle \dot{y} - f(y(\cdot), u(\cdot), p\rangle_{L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^3)} + \big(y(t_\circ) - y_\circ\big)^T p_\circ$$

$$= J(z) + \int_{t_\circ}^{t_f} \big(\dot{y}(t) - f(y(t), u(t))\big)^T p(t)\,\mathrm{d}t + \big(y(t_\circ) - y_\circ\big)^T p_\circ$$

für $z = (y, u) \in Z$ und $(p, p_\circ) \in Y \times \mathbb{R}^3$.

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Richtungsableitungen von $\mathcal{L}$:

Die Ableitung nach $(p, p_\circ)$ ergibt die Zustandsgleichung (1).

Seien $z = (y, u) \in X$ und $(p, p_\circ) \in Y \times \mathbb{R}^3$.

Richtungsableitung nach der Variablen y:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(z, p, p_\circ) y_\delta = \int_{t_\circ}^{t_f} \big(x(t) - x_d(t)\big) x_\delta(t) + \alpha \left(\psi(t) - \psi_d(t)\right) \psi_\delta(t) \,\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{t_\circ}^{t_f} \left(\dot{y}_\delta(t) - \frac{\partial f}{\partial y}(y(t), u(t)) y_\delta(t)\right)^T p(t) \,\mathrm{d}t + y_\delta(t_\circ)^T p_\circ$$

für eine beliebige Richtung $y_\delta = (x_\delta, \psi_\delta) \in Y$.

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Mit $p = (p_x, p_\psi)$, $p_x \in H^1(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$,$p_\psi \in H^1(t_\circ, t_f; \mathbb{R})$,
und $p_\circ = (p_{x\circ}, p_{\psi\circ}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(z, p, p_\circ) x_\delta &= \int_{t_\circ}^{t_f} \big(x(t) - x_d(t)\big) x_\delta(t)\,\mathrm{d}t + x_\delta(t_\circ)^T p_{x\circ} \\ &\quad + \int_{t_\circ}^{t_f} \Big(\dot{x}_\delta(t) - \frac{\partial f}{\partial x}(y(t), u(t)) x_\delta(t)\Big)^T p_x(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{4a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(z, p, p_\circ) \psi_\delta &= \int_{t_\circ}^{t_f} \alpha \big(\psi(t) - \psi_d(t)\big) \psi_\delta(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{t_\circ}^{t_f} \Big(\dot{\psi}_\delta(t) - \frac{\partial f}{\partial \psi}(y(t), u(t)) \psi_\delta(t)\Big) p_\psi(t)\,\mathrm{d}t + \psi_\delta(t_\circ) p_{\psi\circ}\end{aligned} \tag{4b}$$

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Gleich Null setzen und partielle Integration von (4a) liefert:

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \Big(x^*(t) - x_d(t) - \dot{p}_x^*(t) - \frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t), u^*(t))^T p_x^*(t) \Big)^T x_\delta(t)\,\mathrm{d}t$$
$$+ p_x^*(t_f)^T x_\delta(t_f) - \big(p_x^*(t_\circ) - p_{x\circ}^* \big)^T x_\delta(t_\circ) = 0$$

für eine beliebige Richtung $x_\delta \in H^1(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$.

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Für Richtungen $x_\delta \in H^1(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$ mit $x_\delta(t_\circ) = x_\delta(t_f) = 0$:

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \Big(x^*(t) - x_d(t) - \dot{p}_x^*(t) - \frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t), u^*(t))^T p_x^*(t) \Big)^T x_\delta(t) \,\mathrm{d}t = 0.$$

für alle $x_\delta \in H_0^1(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2) \subset H^1(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$.

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Damit löst die duale Variable p_x^* die Differentialgleichung

$$-\dot{p}_x^*(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t), u^*(t))^T p_x^*(t) + x_d(t) - x^*(t) \quad \text{für } t \in (t_\circ, t_f). \tag{5a}$$

Verwende $(5a)$ und wähle $x_\delta \in H^1(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$ mit $x_\delta(t_\circ) = 0$ und dann mit $x_\delta(t_f) = 0$, so erhalten wir die Bedingungen

$$p_x^*(t_f) = 0 \quad \text{und} \quad p_{x,\circ}^* = p_x^*(t_\circ). \tag{5b}$$

Analog für die partielle Ableitung nach ψ und verwende $(4b)$

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Insgesamt mit (5) erhalten wir mit $y_d = (x_d, \psi_d) \in L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^3)$ die **dualen Gleichungen** für $t \in [t_\circ, t_f)$

$$-\dot{p}^*(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(y^*(t), u^*(t))^T p^*(t) + \begin{pmatrix} x_d(t) - x^*(t) \\ \alpha(\psi_d(t) - \psi^*(t)) \end{pmatrix} \tag{6a}$$

$$p^*(t_f) = 0, \tag{6b}$$

$$p^*_\circ = p^*(t_\circ). \tag{6c}$$

Hierbei gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y^*(t), u^*(t))^T p^*(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{r}{2}\left(-(u_1^*(t) + u_2^*(t))\sin(\psi^*(t))\right) \\ 0 & 0 & \frac{r}{2}(u_1^*(t) + u_2^*(t))\cos(\psi^*(t)) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} p_x^*(t) \\ p_\psi^*(t) \end{pmatrix}$$

für $t \in [t_\circ, t_f]$.

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Die Lösung des linearen Anfangswertproblems (6a)-(6b) wird zu $z^* = (y^*, u^*)$ gehörender **adjungierter** oder **dualer Zustand** genannt.

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Ableitung von $\mathcal{L}$ nach der Variablen u:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(z, p, p_\circ)u_\delta \\ &\qquad = \int_{t_\circ}^{t_f} \left(\beta\left(u(t) - u_d(t)\right) - \frac{\partial f}{\partial u}(y(t), u(t))^T p(t)\right)^T u_\delta(t) + \gamma\, \dot{u}(t)^T \dot{u}_\delta(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Setze die partielle Ableitung der Lagrangefunktion an einer kritischen Stelle $z^* = (y^*, u^*)$ und $(p^*, p_\circ^*)$ gleich Null, es folgt:

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \left(\beta\left(u^*(t) - u_d(t)\right) - \frac{\partial f}{\partial u}(y^*(t), u^*(t))^T p^*(t)\right)^T u_\delta(t) + \gamma\, \dot{u}^*(t)^T \dot{u}_\delta(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Für $\gamma = 0$ erhalten für alle $t \in [t_\circ, t_f]$:

$$\beta \left(u^*(t) - u_d(t)\right) - \frac{\partial f}{\partial u}(y^*(t), u^*(t))^T p^*(t) = 0 \tag{7}$$

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Andernfalls löst u^* das nichtlineare (Dirichlet-)Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
&-\gamma \ddot{u}^*(t) + \beta u^*(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(y^*(t), u^*(t))^T p^*(t) + \beta u_d(t) \quad \text{für } t \in (t_\circ, t_f),\\
&\dot{u}^*(t_\circ) = \dot{u}^*(t_f) = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Hierbei gilt

$$
\frac{\partial f}{\partial u}(y^*(t), u^*(t))^T p^*(t) = \frac{r}{2} \begin{pmatrix} \cos(\psi^*(t)) & \sin(\psi^*(t)) & \frac{1}{L} \\ \cos(\psi^*(t)) & \sin(\psi^*(t)) & -\frac{1}{L} \end{pmatrix} p^*(t) \text{ für } t \in [t_\circ, t_f]
$$

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Das Optimalitätssystem erster Ordnung aus:
der Zustandsgleichung (2):

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \text{ für } t \in (t_\circ, t_f] \quad \text{und} \quad y(t_\circ) = y_\circ$$

den adjungierten Gleichungen (6):

$$\dot{p}^*(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(y^*(t), u^*(t))^T p^*(t) + \begin{pmatrix} x_d(t) - x^*(t) \\ \alpha(\psi_d(t) - \psi^*(t)) \end{pmatrix} \text{ für } t \in [t_\circ, t_f)$$

$$p^*(t_f) = 0,$$

$$p_\circ^* = p^*(t_\circ)$$

der Optimalitätsbedingung (7) **bzw.** (8):

$$\beta\left(u^*(t) - u_d(t)\right) - \frac{\partial f}{\partial u}(y^*(t), u^*(t))^T p^*(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [t_\circ, t_f]$$

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Die Ableitung $J'(u)$ des reduzierten Zielfunktionals $\hat{J}$ an einer Stelle u für $\gamma = 0$:

$$\hat{J}'(u) = \beta\,(u - u_d) - \frac{\partial f}{\partial u}(y(\cdot), u(\cdot))^T p \in L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2), \tag{9}$$

wobei $y = (x, \psi)^T \in Y$ die Zustandsgleichung (2) löst und p die Lösung von

$$-\dot{p}(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(y(t), u(t))^T p(t) + y_d(t) - y(t) \quad \text{für } t \in [t_\circ, t_f), \tag{10a}$$

$$p(t_f) = 0, \tag{10b}$$

$$p_\circ = p(t_\circ) \tag{10c}$$

ist.

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Für $\gamma > 0$ an der Stelle von (9):

$$\hat{J}'(u) = -\gamma \ddot{u} + \beta\,(u - u_d) - \frac{\partial f}{\partial u}(y(\cdot), u(\cdot))^T p \in H^{-1}(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^3) = U', \quad (11)$$

wobei U' den Dualraum von U bezeichnet.

Dann die Richtungsableitung von $\hat{J}$ and u in Richtung $u_\delta \in U$:

$$\langle \hat{J}'(u), u_\delta \rangle_{U',U} = \int_{t_\circ}^{t_f} \gamma \dot{u}(t)^T \dot{u}_\delta(t) + \Big(\beta\big(u(t) - u_d(t)\big) - \frac{\partial f}{\partial u}(y(t), u(t))^T p(t)\Big)^T u_\delta(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Beachte, dass wir den Dualraum von $L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$ mit $L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$ identifizieren können, das heißt, im Fall $\gamma = 0$ verwenden wir $U' = U$.

Als numerisches Verfahren können wir z.B. das in Algorithmus 1 verwenden.

4. Algorithm 1 (Abstiegsverfahren)

1: Wähle die Eingabedaten für (2): $t_\circ \geq 0$, $t_f > t_\circ$, $y_\circ = (x_\circ, \psi_\circ) \in \mathbb{R}^3$.

2: Wähle Daten für (**P**): $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\gamma = 0$ ($\beta + \gamma > 0$),
$y_d = (x_d, \psi_d) \in L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^3)$, $u_d \in L^2(t_\circ, t_f; \mathbb{R}^2)$.

3: Wähle Parameter für das Verfahren: $k_{\max} \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{\text{abs}} \geq \varepsilon_{\text{rel}} > 0$,
$c \in [10^{-4}, 10^{-3}]$, $u^0 \in U$.

4: Berechne die Lösung y^0 von (2) für $u = u^0$.

5: Werte $\hat{J}(u^0) = J(y^0, u^0)$ aus.

6: Bestimme p^0 aus (10) mit $y = y^0$ und $u = u^0$.

7: Berechne $\hat{J}'(u^0)$ gemäß (9).

4. Algorithm 1 (Fortsetzung 1)

8: Setze $k = 0$.

9: **while** $\left(\|\hat{J}'(u^k)\|_{U'} \leq \varepsilon_{\mathrm{abs}} + \varepsilon_{\mathrm{rel}} \|\hat{J}'(u^0)\|_{U'} \text{ **or** } k \geq k_{\max}\right)$

10: Wähle die Richtung $d^k = -J'(u^k)/\left\langle J'(u^k), J'(u^k)\right\rangle$ mit $\langle \hat{J}'(u^k), d^k \rangle_{U',U} < 0$.

11: Bestimme Schrittweitenparameter $s_k > 0$, so dass die Armijo-Regel

$$\hat{J}'(u^k + s_k d^k) \leq \hat{J}(u^k) + c s_k \langle \hat{J}'(u^k), d^k \rangle_{U',U}$$

erfüllt ist.

12: Setze $u^{k+1} = u^k + s_k d^k$ und $k = k + 1$;

4. Algorithm 1 (Fortsetzung 2)

if$\left(\|\hat{J}'(u^k)\|_{U'} > \varepsilon_{\mathrm{abs}} + \varepsilon_{\mathrm{rel}}\, \|\hat{J}'(u^0)\|_{U'}\right.$ **or** $\left. k < k_{\max}\right)$

Berechne die Lösung y^k von (2) für $u = u^0$.

Werte $\hat{J}(u^k) = J(y^k, u^k)$ aus.

Bestimme p^k aus (10) mit $y = y^k$ und $u = u^k$.

end if

end while