Sätze von Gauß und Stokes

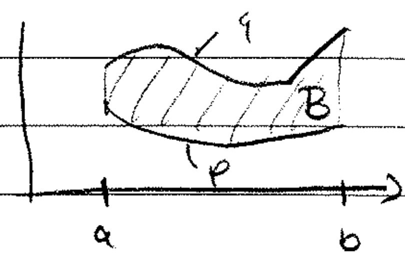
1. Gradient, Divergenz, Rotation

Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann heißt
$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x)^T$$
Gradient von f. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\|v\| = 1$, so nennen wir
$$D_v f(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+hv) - f(x)\right)$$
die Richtungsableitung von f in Richtung v am Punkt x. Ist f differenzierbar an x, so folgt $D_v f(x) = f'(x)\,v$.

Sei $w = (w_1, \ldots, w_n): G \to \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. So ist die Divergenz
$$\operatorname{div} w(x) = \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n}(x) = \nabla \cdot w(x) \quad \text{(Skalarprodukt)}.$$
Ist $f: G \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar, so ist
$$\Delta f(x) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x).$$
Für differenzierbares $w: \mathbb{R}^3 \supset G \to \mathbb{R}^3$ definiert man die Rotation durch
$$\operatorname{rot} w(x) = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_2}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)(x)^T$$
$$= \nabla \times w.$$
Für zweimal stetig partiell differenzierbares $f: \mathbb{R}^3 \supset G \to \mathbb{R}$ gilt mit dem Satz von Schwarz: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$.

2. Satz von Gauß in der Ebene

Als Vorstufe für den Satz von Stokes benötigen wir einen Zusammenhang zwischen Gebietsintegralen über ebene Bereiche B und Kurvenintegralen über den Rand ∂B. Wir beschränken uns zunächst dabei auf Gebiete der folgenden Gestalt:
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x) \le y \le q(x),\ a \le x \le b\}$$
mit $p, q: [a,b] \to \mathbb{R}$, $p < q$ in (a,b) stückweise stetig differenzierbar.



B heißt Normalbereich bzgl. der x-Achse.

Ist B bzgl. der x- und y-Achse normal, so heißt B Normalbereich.

Wir betrachten nun die Kurve $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, wobei

C_1: $x(t) = t$, $y(t) = p(t)$, $a \leq t \leq b$,

C_2: $x(t) = b$, $y(t) = t$, $p(b) \leq t \leq q(b)$

C_3: $x(t) = -t + a + b$, $y(t) = q(-t + a + b)$, $a \leq t \leq b$,

C_4: $x(t) = a$, $y(t) = -t + p(a) + q(a)$, $p(a) \leq t \leq q(a)$

Offenbar ist C eine stückweise glatte Kurve mit $|C| = \partial B$. Dabei können sich $|C_2|$ und $|C_4|$ auf je einen Punkt reduzieren (falls $p(b) = q(b)$ bzw. $q(a) = p(a)$ gilt).

C heißt positiv orientierter Rand von B. Wir bezeichnen diesen kurz ebenfalls mit ∂B.

Satz von Gauß in der Ebene. Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $B \subset G$ ein Normalbereich und ∂B der positiv orientierte Rand. Sei $f : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gelten

$$\int_B f_y \, dx \, dy = -\int_{\partial B} f \, dx,$$

$$\int_B f_x \, dx \, dy = \int_{\partial B} f \, dy.$$

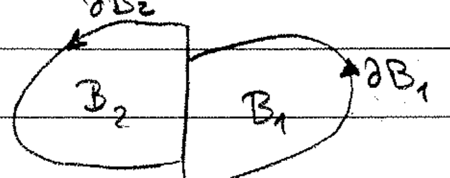
Bemerkung. a) Sei $C = (x(t), y(t))$ glatt, $a \leq t \leq b$. So definieren wir

$$\int_C f \, dx := \int_a^b f(x(t), y(t)) \, \dot{x}(t) \, dt,$$

$$\int_C f \, dy := \int_a^b f(x(t), y(t)) \, \dot{y}(t) \, dt.$$

b) Der Beweis des Satzes basiert auf der Anwendung vom Satz von Fubini.

c) Der Satz von Gauß gilt allgemeiner in Bereichen, die sich aus endlich vielen Normalbereichen zusammensetzen lassen



d) Flächenberechnung in $\mathbb{R}^2$:

$$V_2(B) = \int_B 1\,dx\,dy = \int_{\partial B} x\,dy = -\int_{\partial B} y\,dx,$$

d.h.,

$$V(B) = \frac{1}{2}\int_{\partial B}(x\,dy - y\,dx).$$

3. Der Satz von Stokes

Sei $F: \varphi(u,v)$, $(u,v) \in G \subset \mathbb{R}^2$, G offen, eine glatte Fläche in $\mathbb{R}^3$. Sei $B \subset G$ ein Normalbereich. Sei $A = \varphi(B)$. Ist $\partial B: (u(t), v(t))$, $a \le t \le b$, der positiv orientierte Rand von B, so heißt $\partial A: \varphi(u(t), v(t))$, $a \le t \le b$, positiv orientierter Rand von A. Sind ∂B stückweise glatt und $\varphi(u,v)$ glatt, so ist ∂A stückweise glatt.

Satz von Stokes. Sei $F: \varphi(u,v)$, $(u,v) \in G$ (offen), glatt. Sei $H \subset \mathbb{R}^3$ offen, $H \supset |F|$. Sei $a: H \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Sei $A = \varphi(B)$ mit $B \subset G$ Normalbereich. Dann gilt

$$\int_A \langle \operatorname{rot} a, n\rangle\,dS = \int_{\partial B} a\,dx \to \sum \int_{c_i} a\,dx = \sum \int_{a_i}^{b_i} a(x(t))\,\dot{x}(t)\,dt$$

$$= \int_B \langle \operatorname{rot} a(\varphi(u,v)), n(\varphi(u,v))\rangle \sqrt{\det(\varphi'(u,v)^T \varphi'(u,v))}\,du\,dv$$

Bemerkung. a) Die Ausdehnung des Satzes lässt sich wieder wie in Abschnitt 2 erzielen, d.h., der Satz von Stokes gilt auch in Bereichen, die sich aus endlich vielen Normalbereichen zusammensetzen.

b) Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $a: U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, $x_0 \in U$ und $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ zwei orthonormale Einheitsvektoren. Sei $A_r: \varphi(u,v) = x_0 + u w_1 + v w_2$, $u^2 + v^2 \le r^2$ (Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt x_0). Dann gilt

$$\underbrace{\langle \operatorname{rot} a(x_0), (w_1 \times w_2)\rangle}_{= \|\operatorname{rot} a(x_0)\| \underbrace{\|w_1 \times w_2\|}_{=1} \cos(\ )} = \lim \frac{1}{\mu(A_r)} \int_{\partial A_r} a\,dx \qquad (*)$$

mit $\mu(A_r) = \pi r^2$.

Ist a z.B. ein Kraftfeld, so stellt $\int_{\partial A_r} a\,dx$ die beim Umlauf um A_r geleistete Arbeit dar. Die rechte Seite von (*) kann daher als "spezifische Randarbeit" interpretiert werden, während die linke Seite die Normalenkomponente von rot a im Punkt x_0 ist. Offenbar ist die spezifische Randarbeit maximal, und zwar gleich $\|\mathrm{rot}\, a(x_0)\|$, wenn rot a orthogonal zum ebenen Flächenstück A_r ist

4. Der Satz von Gauß

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Der Rand ∂G sei aus endlich vielen glatten Flächenstücken $F_i : \varphi_i(u,v)$, $(u,v) \in B_i$, zusammengesetzt, wobei B_i die abgeschlossenen Hüllen von Gebieten $G_i \subset \mathbb{R}^2$ mit stückweise glatten Rändern $\partial B_i = \partial G_i$ seien. Die Parameterdarstellungen $\varphi_i(u,v)$ seien noch in Gebieten $H_i \supset B_i$ definiert, so dass $\partial F_i := \varphi_i(\partial B_i)$ ebenfalls stückweise glatt sind. Es gelte

$$\partial G = \bigcup |F_i|$$

wobei die Flächenstücke F_i höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Ferner zeigen $\frac{\partial}{\partial u}\varphi_i \times \frac{\partial}{\partial v}\varphi_i$ stets ins Äußere von G. Es sei

Gram. Det.: $g_i(u,v) = \det(\varphi_i'(u,v)^T \varphi_i'(u,v))$

$$\int_{\partial G} f\,dS := \sum_i \int_{F_i} f\,dS = \sum_i \int_{B_i} f(\varphi_i(u,v))\sqrt{g_i(u,v)}\,du\,dv$$

Satz von Gauß: Sei $a : H \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar mit $\bar{G} \subset H$, so folgt (mit der äußeren Normale)

$$\int_{\bar{G}} \mathrm{div}\, a\,dx = \int_{\partial G} \langle a, n \rangle\,dS$$

Bemerkung a) Der Satz von Gauß liefert eine Umwandlung eines Gebietsintegrals in ein Oberflächenintegral (und umgekehrt).

b) Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $a: U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Seien $x_0 \in U$ und $K_r = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - x_0\| \leq r\}$. Dann gilt

$$\operatorname{div} a(x_0) = \lim \frac{1}{V(K_r)} \int_{\partial K_r} \langle a, n \rangle \, dS \qquad (**)$$

mit $V(K_r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ist a z.B. ein Geschwindigkeitsfeld einer (Flüssigkeits-) Strömung, so stellt $\langle a, n \rangle dS$ die durch das Flächenelement dS pro Zeiteinheit hindurchströmende (Flüssigkeits-) Menge dar, d.h., $\int_{\partial K_r} \langle a, n \rangle dS$ ist die gesamte durch die Oberfläche (teils hinein-, teils heraus-) strömende Menge. Diese ist gleich 0, wenn im Innern von K_r nichts entsteht oder vergeht (z.B. bei inkompressiblen Flüssigkeiten. Die rechte Seite von $(**)$ stellt somit die "spezifische Quelldichte" dar. $\operatorname{div} a = 0$ bedeutet "quellfreies Feld".