Optimale Steuerung

Quasi-Newtonverfahren zur optimalen Steuerung einer nichtlinearen elliptischen Randwertaufgabe

Patrick Knapp

15. Juli 2010

1 Aufgabenstellung

Vorgelegt sei das Problem

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |y - y_d|^2 dx + \frac{\gamma}{2}||u||^2 \tag{1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$-k(x)\Delta y(x) + a(x)y(x) + y(x)^3 = \sum_{i=1}^{M} u_i b_i(x) \text{ für } x \in \Omega \tag{2}$$

$$y(x) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \tag{3}$$

Da wir zur Diskretisierung die Finite-Differenzen-Mathode anwenden wollen, sei im Folgenden der einfachheit halber $\Omega = (a,b)^2 \subset \mathbb{R}^2$, damit wir zum Diskretisieren ein äquidistantes Gitter nutzen können.

Des Weiteren sind
$y_d : \Omega \to \mathbb{R}$
$k : \Omega \to \mathbb{R}$
$a : \Omega \to \mathbb{R}$
gegebene Funktionen anhand von Daten.
$b_i : \Omega \to \mathbb{R}$ sind control shapes , typischerweise $b_i = \chi_{\Omega_i}(x)$ wobei $\Omega_i \subset \Omega$
$u = (u_1, \ldots, u_M)^T \in \mathbb{R}^M$ Steuerung
$y : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ Zustand

2 Diskretisierung

Wir möchten (2) mit der Finite-Differenzen-Methode diskretisieren.
Die Taylorentwicklung liefert

$$z(s \pm h) = z(s) \pm hz'(s) + \frac{h^2}{2}z''(s) \pm \frac{h^3}{6}z^{(3)}(s) + \mathcal{O}(h^4)$$

und somit

$$z''(s) = \frac{1}{h^2}(z(s-h) + z(s+h) - 2z(s)) + \mathcal{O}(h^2)$$

Damit ergibt sich

$\Delta y(x) = \Delta y(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}y(x_1, x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}y(x_1, x_2)$
$= \frac{1}{h^2}(y(x_1 - h, x_2) + y(x_1 + h, x_2) + y(x_1, x_2 - h) + y(x_1, x_2 + h) - 4y(x_1, x_2)) + \mathcal{O}(h^2)$

Setzen wir diese Approximation in (2) ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{4}{h^2}k(x) + a(x)\right)y(x) - \frac{1}{h^2}k(x)(y(x_1 - h, x_2) + y(x_1 + h, x_2)$$
$$+y(x_1, x_2 - h) + y(x_1, x_2 + h)) + y(x)^3 \approx \sum_{i=1}^{M} u_i b_i(x)$$

Überziehen wir nun, gemäß der Finite-Differenzen-Methode, unser Gebiet Ω mit einem äquidistantes Gitter mit m Maschen pro Zeile und Spalte, so erhalten wir den Gittervektor $x = (x_1, \ldots, x_N)^T$ mit $N = l^2 = (m-1)^2$. Wir verwenden hierbei die lexikographische Ordnung, d.h. Zeilenweise von links nach rechts und Spaltenweise von unten nach oben.
Nun betrachten wir die gesuchte Funktion y nur noch an den Gitterpunkten und erhalten so $y = (y(x_1), \ldots, y(x_N))^T$.

Damit können wir (2) als Gleichungssystem

$$Ay + H(y) = Bu \tag{4}$$

umschreiben, mit

$$d_j = \frac{4}{h^2}k(x_j) + a(x_j)$$
$$c_j = -\frac{1}{h^2}k(x_j)$$

$$D_i = \begin{pmatrix} d_{1+il} & c_{1+il} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ c_{2+il} & d_{2+il} & c_{2+il} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{3+il} & d_{3+il} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_{(l-2)+il} & c_{(l-2)+il} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{(l-1)+il} & d_{(l-1)+il} & c_{(l-1)+il} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{l+il} & d_{l+il} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l,l}$$

$$C_i = \begin{pmatrix} c_{1+il} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{2+il} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3+il} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{(l-2)+il} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{(l-1)+il} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{l+il} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l,l}$$

$$A = \begin{pmatrix} D_0 & C_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & D_1 & C_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & D_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{(l-3)} & C_{(l-3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{(l-2)} & D_{(l-2)} & C_{(l-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{(l-1)} & D_{(l-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}$$

$$H(y) = \begin{pmatrix} y_1^3 \\ y_2^3 \\ \vdots \\ y_{N-1}^3 \\ y_N^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1(x_1) & b_2(x_1) & \dots & b_{M-1}(x_1) & b_M(x_1) \\ b_1(x_2) & b_2(x_2) & \dots & b_{M-1}(x_2) & b_M(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_1(x_{N-1}) & b_2(x_{N-1}) & \dots & b_{M-1}(x_{N-1}) & b_M(x_{N-1}) \\ b_1(x_N) & b_2(x_N) & \dots & b_{M-1}(x_N) & b_M(x_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,M}$$

Da aufgrund von (3) $y = 0$ auf $\partial\Omega$ entstehen hierbei keine Randterme.
Das nichtlineare Gleichungssystem (4) lässt sich nun mit dem Newton Verfahren lösen.

3 Integral

Als nächstes befassen wir uns damit, das Integral

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx$$

aus unserem Zielfunktional numerisch zu berechnen.
Hierzu verwenden wir die zusammengesetzten Trapezregel

$$\int_{s_0}^{s_N} z(t)dt = \frac{s_N - s_0}{N}\left(\frac{1}{2}z(s_0) + \frac{1}{2}z(s_N) + \sum_{i=1}^{N-1} z(s_i)\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

In unserem Fall erhalten wir damit

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx \approx \frac{1}{2}\underbrace{\frac{(b-a)^2}{m^2}}_{q}(\underbrace{(y-y_d)^T(y-y_d)}_{innerePunkte} + \frac{1}{2}Rand + \frac{1}{4}Ecken)$$

4 Gradient

Um das Quasi-Newton-Verfahren anwenden zu können benötigen wir noch den Gradienten des Zielfunktionals. Hierzu bilden wir zunächst die Richtungsableitung nach u_δ

$$\begin{aligned} J(y(u),u)'u_\delta &= D_y J(y(u),u)y'(u)u_\delta + D_u J(y(u),u)u_\delta \\ &= \langle \nabla_y J(y(u),u), y'(u)u_\delta\rangle_{\mathbb{R}^N} + \langle \nabla_u J(y(u),u), u_\delta\rangle_{\mathbb{R}^M} \\ &= \left\langle \nabla_y J(y(u),u), (A + H'(y))^{-1}Bu_\delta\right\rangle_{\mathbb{R}^N} + \langle \nabla_u J(y(u),u), u_\delta\rangle_{\mathbb{R}^M} \\ &= \left\langle B^T \underbrace{(A + H'(y))^{-T}\nabla_y J(y(u),u)}_{=:-p} + \nabla_u J(y(u),u), u_\delta \right\rangle_{\mathbb{R}^M} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass (4) in Richtung u_δ abgeleitet

$$(A + H'(y))y'(u)u_\delta = Bu_\delta$$

ergibt und wir somit

$$y'(u)u_\delta = (A + H'(y))^{-1}Bu_\delta$$

erhalten.

Zusammen mit

$$\begin{aligned} \nabla_y J(y(u),u) &= q(y - y_d) \\ \nabla_u J(y(u),u) &= \gamma u \end{aligned}$$

ergibt sich

$$p = -(A + H'(y))^{-T}q(y - y_d) \tag{5}$$

und somit

$$\nabla J(y(u),u) = \gamma u - B^T p \tag{6}$$

Nun können wir das Quasi-Newton-Verfahren anwenden um unser Funktional (1) zu minimieren.