Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Roberta Mancini, Stefan Trenz

11. April 2011

Optimierung
1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Lokale Extrema)

Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen der *Rosenbrock-Funktion*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1, x_2) := 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Aufgabe 2 (Abstandsoptimierung)

Seien a, b, c, d Vektoren des $\mathbb{R}^n$, wobei (b, d) linear unabhängig seien. Wir parametrisieren zwei Geraden $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ durch

$$x(s) := a + sb; \qquad y(t) := c + td \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Gesucht sind die globalen Extremstellen der Abstandsfunktion

$$(s, t) \mapsto ||x(s) - y(t)||.$$

Aufgabe 3 (Lokale Auflösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme)

Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 0 \\ y^2 - z^2 & = & 0 \end{cases}$$

lokal bei $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ nach (y, z) aufgelöst werden kann.

Hinweis: Zu zeigen ist also die Existenz einer Umgebung W von $x_0 = 1$ und einer Funktion $\varphi : W \to \mathbb{R}^2$, so dass das Tripel $(x, y(x), z(x)) := (x, \varphi(x))$ für alle $x \in W$ das Gleichungssystem erfüllt.

Aufgabe 4 (Charakteristikenmethode)

Seien $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ injektiv, $\Gamma := \gamma(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}^2$ mit $||\xi|| = 1$ und $t_0 \in \mathbb{R}$, so dass $\{\xi, \dot{\gamma}(t_0)\}$ linear unabhängig ist.

Gesucht sind eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $x_0 := \gamma(t_0)$ und eine Funktion $u \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ mit

$$\begin{cases} \langle \xi, \nabla u(x) \rangle & = & 0 & \text{für alle } x \in U \\ u(\gamma(t)) & = & f(t) & \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit } \gamma(t) \in U \end{cases}$$

1. Nehmen Sie zunächst an, dass solch ein u existiert, und leiten Sie das Aussehen von u längs den Geraden $\Gamma_t := \{\gamma(t) + s\xi \mid s \in \mathbb{R}\}$ her.
2. Da die Geraden Γ_t eine Umgebung um x_0 überdecken, setzt sich so eine Darstellung für ganz u zusammen. Zeigen Sie, dass diese zusammengesetzte Funktion $\mathcal{C}^1$ ist und Differenzialgleichung sowie Nebenbedingung erfüllt.
3. Ist u eindeutig bestimmt?

Abgabe: Montag, 18. April, 8:30 Uhr